1 Analysis

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x \;,\; x \in \mathbb{R}$ an.

(2 Punkte)

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen:

$g'(3) = 2$

$g''(3) = 0$

$g'''(3) \neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen ?

(2 Punkte)

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x \;,\; x \in \mathbb{R}$

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagerechte Tangente hat.

(3 Punkte)

1.3.2 Ermitteln Sie die Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt P(0/5) verläuft.

(3 Punkte)

1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x) \;,\; x \in \mathbb{R}$

1.4.1 Es gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$.

Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei verschiedene Werte für a, sodass gilt:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$$

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise. (3 Punkte)

1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x+2) \;,\; x \in \mathbb{R}$ aus dem Schaubild von p hervorgeht.

(2 Punkte)

2 Stochastik

2.1 Ein Experiment gelingt in 50% aller Fälle.

Prüfen Sie, ob das Experiment bei viermaliger Durchführung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal gelingt.

(3 Punkte)

2.2 A und B sind zwei beliebige Ereignisse.
Die Wahrscheinlichkeit, dass weder das Ereignis A noch das Ereignis B eintritt beträgt 42%. Die Wahrscheinlichkeit, dass A und das Gegenereignis von B eintritt, beträgt 28%. Die Wahrscheinlichkeit, dass B und das Gegenereignis von A eintritt, beträgt 18%.

Zeigen Sie: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

(4 Punkte)

3 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

Gegeben sind die Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R}$$

und

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}$$

3.1 Untersuchen Sie die beiden Geraden auf ihre gegenseitige Lage.

(3 Punkte)

3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_3, die sowohl g_1 als auch g_2 schneidet.

(2 Punkte)

3.3 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_4, die g_1 rechtwinklig schneidet. Geben Sie den Abstand von g_1 zur x_1x_2-Ebene an.

(3 Punkte)

3 Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrrcl} 2\cdot x & -3\cdot y & +z & = & 4 \\ -x & +y & +z & = & 1 \\ & 2\cdot y & +3\cdot z & = & 6 \end{array}$$

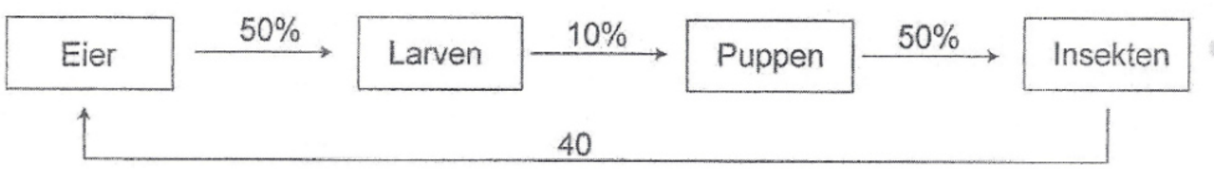
(3 Punkte)

3.2 In der Matrizengleichung $A \cdot B = C$ hat die Matrix A zwei Zeilen und vier Spalten. Die Matrix C ist eine quadratische Matrix.

Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix B ?

(2 Punkte)

3.3 Die Entwicklung einer Insektenpopulation wird durch folgendes Diagramm modelliert:



Aus 50% der Eier werden Larven, von denen sich 10% verpuppen. Aus 50% der Puppen schlüpfen die geschlechtsreifen Insekten, die pro Insekt 40 Eier legen und anschließend sterben.

Vereinfachend wird angenommen, dass jedes dieser vier Entwicklungsstadien jeweils 40 Tage benötigt.

Zu Beginn zählt man 10000 Eier, 4000 Larven, 600 Puppen und 300 Insekten.
Wie viele Eier, Larven, Puppen und Insekten zählt man nach dem Modell nach 40 Tagen ?

Begründen Sie, warum die Population nach dem obigen Modell nicht ausstirbt.

(3 Punkte)

1 Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 + x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K. (8 Punkte)

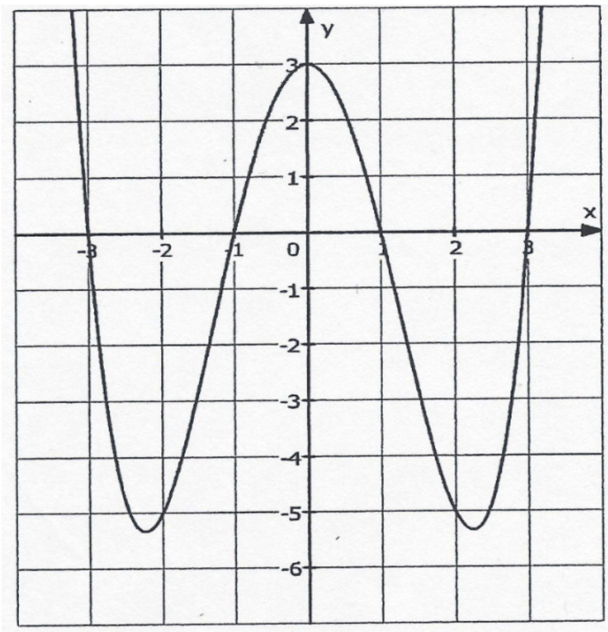
1.1.2 Das Schaubild K, die Tangente von K an der Stelle x = -1 und die y-Achse schließen im zweiten Quadranten eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (5 Punkte)

1.1.3 Für einen positiven Wert von m hat das Schaubild der Funktion g mit
$g(x) = 0{,}5 \cdot x^4 + x^3 + x^2 + m \cdot x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

genau einen gemeinsamen Punkt mit K.

Bestimmen Sie diesen Wert von m. (3 Punkte)

1.2 C ist das Schaubild einer Funktion h.
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion h' .



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den abgebildeten Bereich wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Das Schaubild C hat den Tiefpunkt T(1/h(1)).

(2) Es gibt Punkte, an denen C eine Normale mit Steigung $\frac{1}{6}$ hat.

(4 Punkte)

2 Anwendungsorientierte Analysis

Im Verlauf von etwa 30 Tagen ändert der Mond beständig sein Erscheinungsbild (siehe Abbildung).

Der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite des Mondes wird modellhaft durch die Funktion A mit

$$A(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) \;;\; 0 \le t \le 30 \;,$$

beschrieben. Dabei steht t für die Tage seit Beobachtungsbeginn, beispielsweise ist t = 1 das Ende des ersten Tages.

Bei Vollmond hat der beleuchtete Anteil den Wert 1.

2.1 Skizzieren Sie das Schaubild von A.

Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage, die durch Lösen der Gleichung A(t) = 0,95 beantwortet werden kann.

(4 Punkte)

2.2 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil, der von Beobachtungsbeginn bis zum Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird.

(4 Punkte)

2.3 Das Modell A soll nun zu einem Modell B abgeändert werden, sodass der Zeitpunkt t = 0 der Beleuchtung bei Vollmond entspricht.

Bestimmen Sie hierzu einen Wert für c, sodass die Funktion B mit

$$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t + c\right) \;;\; 0 \le t \le 30 \,,$$

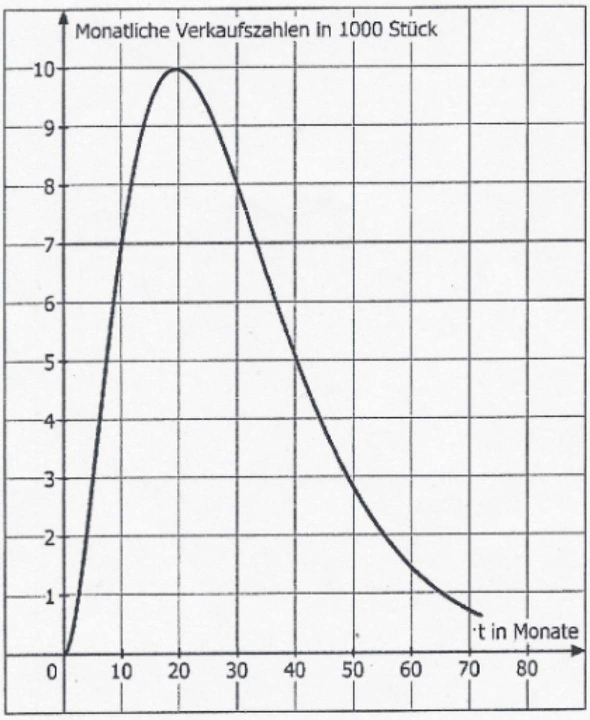
diesen Sachverhalt modelliert.

(2 Punkte)

3 Anwendungsorientierte Analysis

Die folgende Abbildung zeigt die Modellierung eines sogenannten Produktionslebenszyklus. Darin sind die monatlichen Verkaufszahlen V eines Produkts (z.B. PKW) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Zum Zeitpunkt t = 0 beginnt die Einführung des Produkts auf dem Markt. Nach sechs Jahren wird das Produkt vom Markt genommen.

Der Produktlebenszyklus wird lückenlos in vier Phasen unterteilt:



1. <u>Einführungs- und Wachstumsphase</u>
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
2. <u>Reifephase</u>
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Verkaufszahlen überschreiten 95% des Maximums nicht
   - keine Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
3. <u>Sättigungsphase</u>
   - Verkaufszahlen liegen über 95% des Maximums
4. <u>Degenerationsphase</u>
   - beginnt nach der Sättigungsphase

Die Aufgaben 3.1 und 3.2 sollen <u>näherungsweise</u> mit Hilfe der Abbildung gelöst werden.

3.1 Geben Sie für jede der vier Phasen das entsprechende Zeitintervall an.
(4 Punkte)

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der verkauften Produkte in den gesamten sechs Jahren.
(2 Punkte)

3.3 Im Folgenden ist V die Funktion der monatlichen Verkaufszahlen in Abhängigkeit von der Zeit t. Formulieren Sie jeweils einen mathematischen Ansatz, um folgende Fragen mithilfe von V beantworten zu können:

(1) In welchem Zeitraum liegen die monatlichen Verkaufszahlen über 3000 Stück und weisen keinen Rückgang auf ?
(2) In welchen dreimonatigen Zeiträumen liegt die Gesamtverkaufszahl bei 40000 ?

(4 Punkte)

4 Anwendungsorientierte Analysis

In Schulversuchen wird die Lösung eines chemischen Stoffes mit Salzsäure versetzt. Dadurch zerfällt der Stoff und dessen Konzentration c sinkt im Laufe der Zeit t.

v ist die momentane Änderungsrate der Konzentration c.

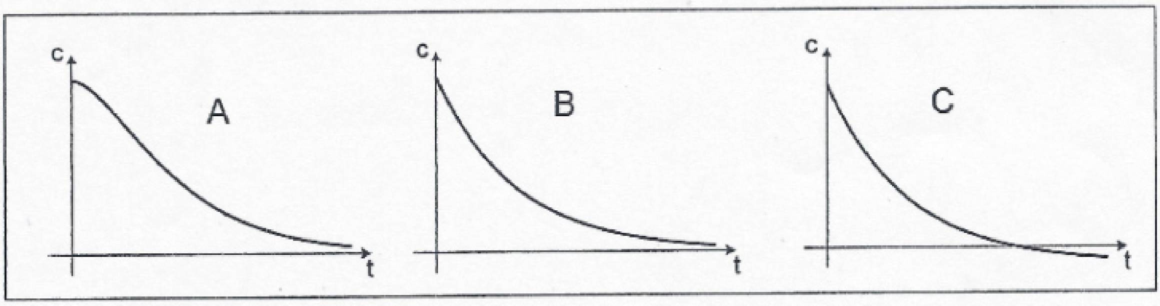
Im Folgenden sind c in Mol pro Liter $\left(\frac{\text{mol}}{\text{l}}\right)$ und die Zeit t in Sekunden (s) angegeben.

4.1 In einem ersten Versuch wird die Konzentration c in Abhängigkeit von t modelliert durch: $c(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017t}$, $t \geq 0$.

4.1.1 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem nur noch 10% der Anfangskonzentration vorhanden sind.

Geben Sie den Wert von v drei Minuten nach Versuchsbeginn an.
In welcher Einheit wird v gemessen ? (4 Punkte)

4.1.2 Eine der unten stehenden drei Abbildungen zeigt das Schaubild der Funktion c. Entscheiden Sie welche. Erläutern Sie, warum die beiden anderen Schaubilder nicht in Frage kommen. (2 Punkte)



4.2 Unter anderen Bedingungen berechnet sich die momentane Änderungsrate v zum Zeitpunkt t durch $v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07t}$, $t \geq 0$

Die Anfangskonzentration des Stoffes ist dann $0{,}125\ \frac{\text{mol}}{\text{l}}$.

Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangskonzentration langfristig übrig bleibt.

(4 Punkte)

1 Stochastik

Beim Strafstoß („Elfmeter“) gibt es drei mögliche Ergebnisse:
(1) Der Schütze erzielt ein Tor.
(2) Der Torhüter wehrt den Ball ab.
(3) Der Schütze trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% ein Tor.

1.1 Tom schießt vier Strafstöße. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
A: Er erzielt vier Tore.
B: Er erzielt mindestens drei Tore.
C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

(5 Punkte)

1.2 Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an:
„Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro, sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro. Ansonsten musst du mir 10 Euro geben.“
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

(5 Punkte)

1.3 In einer Fußballliga wird bei 87% aller Strafstöße ein Tor erzielt.
10% der Strafstöße werden vom Torhüter abgewehrt.

1.3.1 Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter den Ball abgewehrt hat.

(2 Punkte)

1.3.2 In einer Saison wurden 70 Strafstöße gegeben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens 68 Tore erzielt werden.

(3 Punkte)

2 Stochastik

An einem Kiosk kann man Rubbellose kaufen. Ein Los besteht aus insgesamt 16 Feldern. Auf jedem Feld steht genau eine Zahl.
Auf acht Feldern steht die Zahl 0, auf vier Feldern die Zahl 1 und auf den restlichen vier Feldern die Zahl 5.
Die Zahlen sind zufällig auf die Felder verteilt.
Die Felder sind von einer undurchsichtigen Schicht überzogen, sodass die Zahlen erst durch Rubbeln der Felder sichtbar werden.

Der Käufer eines Loses muss genau zwei Felder aufrubbeln (vgl. Abbildung).
Das <u>Produkt</u> der Zahlen, die hierbei sichtbar werden, ist der Betrag in Euro, die der Kioskbetreiber an den Losbesitzer auszahlen muss,

2.1 Eine Frau kauft ein Rubbellos und rubbelt genau zwei Felder frei.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten er folgenden Ereignisse:

A: Genau ein frei gerubbeltes Feld zeigt die Zahl 5.
B: Die Frau bekommt mindestens einen Euro ausgezahlt.

(3 Punkte)

2.2 Ein Mann kauft an fünf Tage in Folge jeweils ein Los. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Mann genau zweimal 25 Euro erhält.

(3 Punkte)

2.3 Der Kioskbetreiber kauft die Lose für 20 Cent je Stück ein und verkauft ein Los für 2,50 Euro. Bestimmen Sie die Höhe des Gewinns pro Los, den der Kioskbetreiber im Mittel erwarten kann.

(4 Punkte)

2.4 Ein Kioskbetreiber notiert immer am Ende des Tages die Anzahl der an diesem Tag verkauften Rubbellose. Ein Student, der als Aushilfe am Kiosk arbeitet, wertet diese Daten aus: Im Mittel werden 17 Lose pro Tag verkauft, wobei die Standardabweichung 4 beträgt.

Der Student macht folgende Annahmen:
(1) Die Anzahl n der Kunden, die den Kiosk aufsuchen, ist an jedem Tag gleich.
(2) Die Kunden kaufen unabhängig voneinander entweder genau ein oder aber kein Rubbellos.

Bestimmen Sie den Wert für n, den der Student unter der Annahme einer Binomialverteilung ermittelt.

Welche Information liefert die Sigma-Regel $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68{,}3\%$ dem Studenten in diesem Sachzusammenhang.?

(5 Punkte)

1 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1.1 Gegeben ist die Ebene E: $2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_3 = 12$.

1.1.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt von E mit der x_3- Achse.

Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene F an, die parallel zu E aber nicht identisch mit E ist.

Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene G an, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat.

(4 Punkte)

1.1.2 Bestimmen Sie a und b, sodass die Ebene E in Normalenform als

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann. (2 Punkte)

1.1.3 Prüfen Sie, ob der Punkt P(1/0/1) zur Ebene E den Abstand $d = \sqrt{13}$ hat.

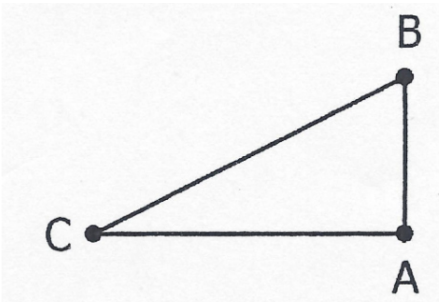
(3 Punkte)

1.2 Gegeben sind die Punkte A(0/0/2) und B(0/0/4).
Ein weiterer Punkt C erfüllt folgende Bedingungen:

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

(2) $\frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = 6$

Skizze:



1.2.1 Interpretieren Sie die Bedingungen (1) und (2) geometrisch.

(2 Punkte)

1.2.2 Bei Rotation der Fläche um die Achse AB entsteht ein Rotationskörper.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Ein möglicher Punkt C hat die Koordinaten (c/c/2) mit c > 0.
Bestimmen Sie den Wert von c. (4 Punkte)

1 Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

1.1 Ein Unternehmen stellt aus den beiden Rohstoffen R1 und R2 die drei Zwischenprodukte Z1, Z2 und Z3 her. Aus den drei Zwischenprodukten entstehen die beiden Endprodukte E1 und E2.

Die benötigten Rohstoffe je Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Zwischenprodukte sowie die erforderlichen Zwischenprodukte zur Produktion je einer ME der Endprodukte sind in den nachfolgenden Tabellen angegeben.

Rohstoff-Zwischenprodukt

	Z1	Z2	Z3
R1	1	1	a
R2	2	1	1

Zwischen-Endprodukt

	E1	E2
Z1	1	0
Z2	0	2
Z3	2	1

Rohstoff-Endprodukt

	E1	E2
R1	5	4
R2	4	3

1.1.1 Zeigen Sie, dass a in der Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle den Wert 2 hat.
(2 Punkte)

1.1.2 Täglich werden 5 ME von E1 und 10 ME von E2 hergestellt.

1.1.2.1 Ein Mitarbeiter des Unternehmens behauptet, dass hierfür 65 ME von R1 und 50 ME von R2 benötigt werden. Überprüfen Sie die Behauptung.
(2 Punkte)

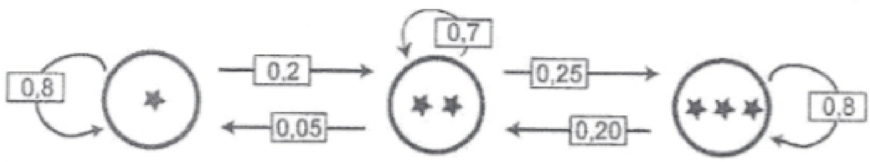
1.1.2.2 Betrachten Sie die Matrizen $D_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Welche dieser drei Matrizen ist die Inverse der Rohstoff-Endproduktmatrix ? Begründen Sie.

Aufgrund von Problemen in der Produktion wurden an einem Tag nur 43 ME von R1 und 33 ME von R2 verarbeitet.
Bestimmen Sie, wie viele ME von E1 und E2 an diesem Tag produziert wurden.
(5 Punkte)

1.2 Ein Institut prüft jährlich die Wasserqualität von Stränden in einer Urlaubsregion und vergibt hierfür ein bis drei Sterne. Ein Stern wird vergeben, wenn die Wasserqualität des Gewässers zum Baden ungeeignet ist. Bei zwei Sternen ist die Wasserqualität noch ausreichend, sodass Baden unbedenklich ist, und drei Sterne verweisen auf eine gute bis hervorragende Wasserqualität.

Das nachfolgende Diagramm beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeiten für eine Zeiteinheit von einem Jahr.



Geben Sie die Übergangsmatrix an.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil der zum Baden ungeeigneten Strände, der sich langfristig einstellt.
(6 Punkte)