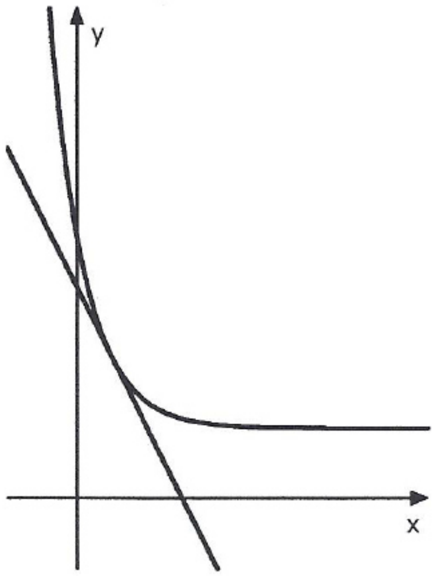
Aufgabe 1: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=e^{-2x+1}+1$.
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x=\frac{1}{2}$.



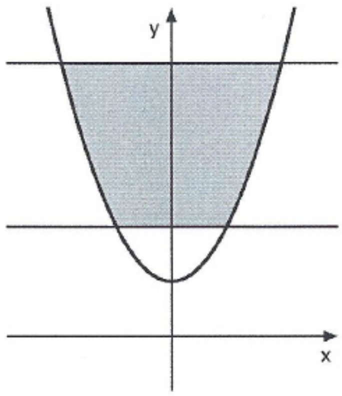
a) Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Steigung -2 hat.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

.
Aufgabe 2: (2,5 VP)

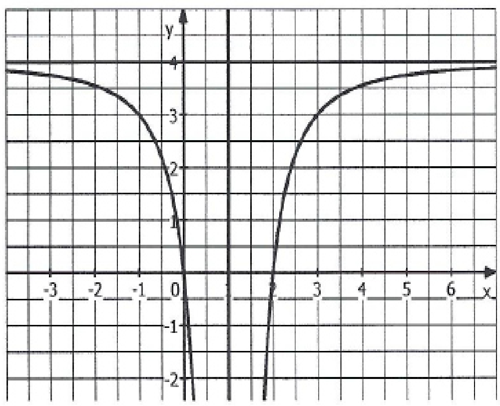
Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x)=1+x^2$ sowie die Geraden g: y = 2 und h: y = 5.

Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



Aufgabe 3: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit
$f(x)=a+\frac{b}{x^2+c}$ und $g(x)=a+\frac{b}{(x+c)^2}$.
Die Abbildung zeigt den Graphen einer der beiden Funktionen sowie seine Asymptoten.



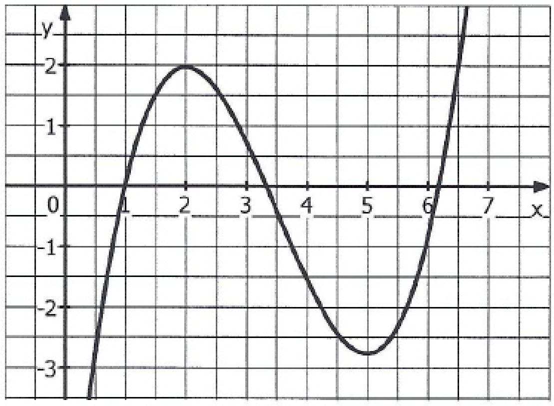
a) Begründen Sie, dass es sich bei dem abgebildeten Graphen nicht um den Graphen von f handeln kann.

b) Bestimmen Sie für die Funktion g die Werte von a, b und c.

Aufgabe 4: (1 VP und 1,5 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f. Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = f(x) + 5x$.

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



(1) Jede Stammfunktion von f besitzt im Intervall [0,5 ; 4] genau ein lokales Maximum.

(2) Die Funktion g ist im Intervall [1;6] streng monoton steigend.

Aufgabe 5: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben sind die Ebenen E und F sowie die Ebenenschar G_r ($r \in \mathbb{R}$).

$$\begin{array}{lrrrcl} E: & x_1 & -5x_2 & -2x_3 & = & 6 \\ F: & 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 3 \\ G_r: & & 9x_2 & +3x_3 & = & r+11 \end{array}$$

a) Stellen Sie die Ebene G_7 in einem Koordinatensystem dar.

b) Für einen Wert von r besitzen E, F und G_r eine gemeinsame Schnittgerade. Bestimmen Sie diesen Wert von r.

Aufgabe 6: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben sind der Punkt P(-1|1|-1) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Der Punkt Q(3|3|3) liegt auf der Geraden g.

a) Zeigen Sie, dass Q derjenige Punkt auf g ist, der zu P den kleinsten Abstand hat.

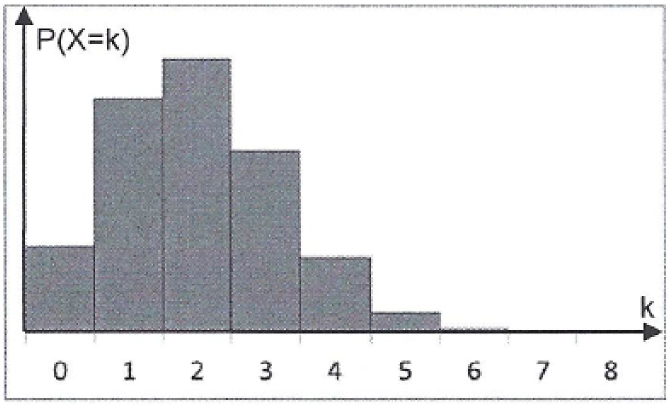
b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes R auf der Geraden g, für den das Dreieck PQR den Flächeninhalt 27 hat.

Aufgabe 7: (2,5 VP)

In einer Urne befinden sich vier schwarze und eine unbekannte Anzahl weißer Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei zwei schwarze Kugeln zu ziehen, ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln unterschiedlicher Farbe zu ziehen.
Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Kugeln in der Urne.

Aufgabe 8: (1 VP und 1,5 VP)

a) Die Abbildung stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X dar.

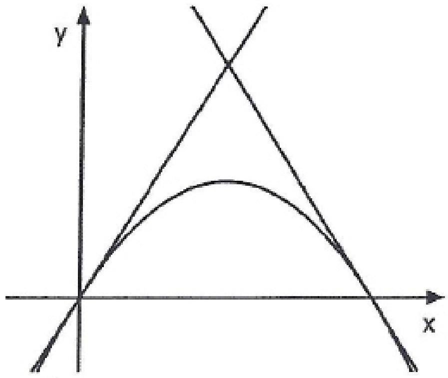


Begründen Sie, dass $P(X=2) < 0{,}5$ gilt.

b) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 8$ und $0 < p < 1$ gilt: $P(Y = 1) = 2 \cdot P(Y = 0)$.
Berechnen Sie den Wert von p.

Aufgabe 1: (0,5 VP und 2 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$.
Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f sowie die Tangenten an G_f in den Schnittpunkten mit der x-Achse.



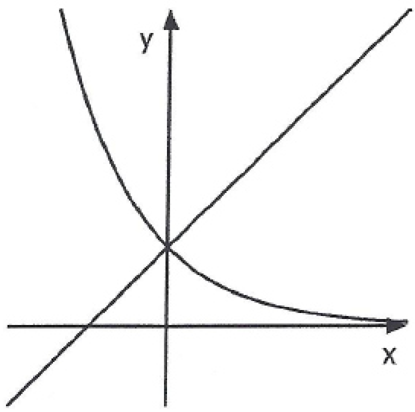
a) Weisen Sie nach: Die Tangente an G_f an der Stelle x = 0 hat die Steigung 4.

b) Die beiden Tangenten schneiden sich in einem Punkt S. Berechnen Sie den Abstand des Punktes S vom Ursprung.

.

Aufgabe 2: (2,5 VP)

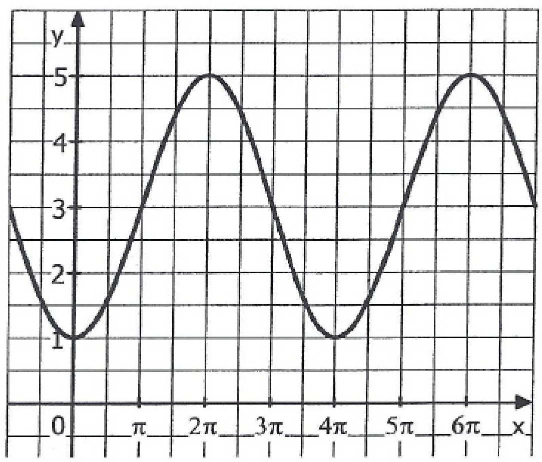
Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$, deren Schnittpunkt auf der y-Achse liegt.



Die Graphen begrenzen mit der x-Achse und der Geraden x = u (u > 0) eine Fläche.
Diese Fläche wird von der y-Achse in zwei inhaltsgleiche Teilflächen geteilt.
Berechnen Sie den Wert von u.

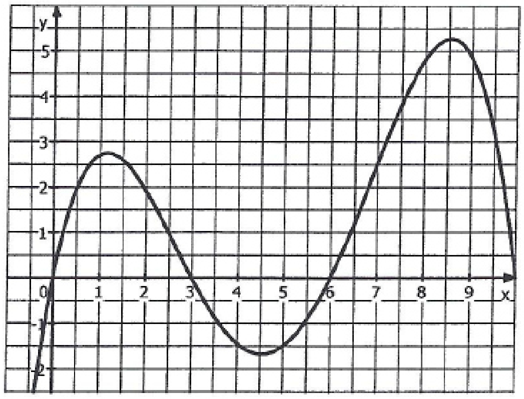
Aufgabe 3: (2,5 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer trigonometrischen Funktion.
Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.



Aufgabe 4: (1 VP und 1,5 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f.



a) Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion f' im Intervall [5;8] nicht monoton ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion I_2 mit $I_2(x) = \int_2^x f(t)dt$, $2 \le x \le 9$

Aufgabe 5: (1,5 VP und 1 VP)

Gegeben sind die Punkte A(6|4|-1) und B(0|-5|2) sowie die Ebene E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$.

a) Die Gerade durch A und B schneidet E im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

b) Untersuchen Sie, ob der Punkt S auf der Strecke AB liegt.

Aufgabe 6: (0,5 VP und 2 VP)

Gegeben ist die Ebene E: $3x_2 - 4x_3 = 2$.

a) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

b) Die Ebene F ist orthogonal zu E und hat zur x_1 -Achse den Abstand 2. Bestimmen Sie eine mögliche Koordinatengleichung von F.

Aufgabe 7: (1 VP und 1,5 VP)

Ein Verein erhält eine Lieferung gebrauchter Computer und Bildschirme. Von den 10 Computern und 15 Bildschirmen funktionieren jeweils drei Geräte nicht. Jemand wählt zufällig einen Computer und einen Bildschirm aus.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide ausgewählten Geräte funktionieren.

b) Nach Inbetriebnahme der zwei ausgewählten Geräte stellt sich heraus, dass beide Geräte funktionieren. Anschließend wählt jemand aus den übrigen Geräten der Lieferung zwei Computer aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden zuletzt ausgewählten Computer funktioniert.

Aufgabe 8: (0,5 VP und 2 VP)

Ein idealer Würfel wird 20-mal geworfen. Betrachtet wird die Anzahl der gewürfelten Sechsen.
Gegeben sind drei Terme:

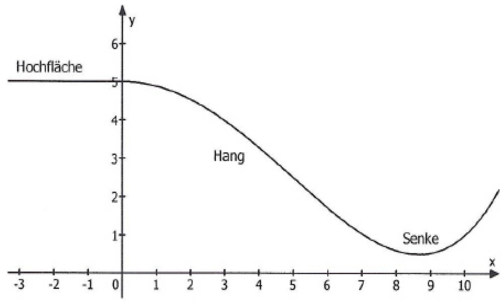
I: $\left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9}$ II: $\binom{20}{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9}$ III: $1-\binom{20}{9} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11}$

a) Geben Sie an, mit welchem der drei Terme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es wird genau 11-mal eine Sechs gewürfelt.“ berechnet werden kann.

b) Formulieren Sie für jeden der beiden verbleibenden Terme ein Ereignis im Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem jeweiligen Term berechnet werden kann.

Aufgabe A 1.1

Das Gelände eines Abenteuerspielplatzes besteht aus einer Hochfläche, an die sich ein Hang mit einer Senke anschließt.
Die Profillinie des Geländes wir für $-3 \leq x \leq 0$ durch die Gerade mit der Gleichung y = 5 und für $0 \leq x \leq 11$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}0008x^4 - 0{,}12x^2 + 5$ beschrieben.
Die Abbildung zeit diese Profillinie.
(1 LE entspricht 1m)



a) Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Profillinie. (2 VP)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle x = 5 am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat. (2 VP)

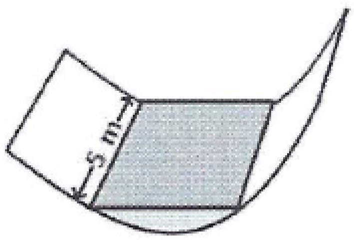
Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist. (1 VP)
(Teilergebnis: Der tiefste Punkt hat die y-Koordinate 0,5)

b) Zwischen zwei Befestigungspunkten, die im Modell durch P(5|f(5)) und Q(10|f(10)) dargestellt werden, wird ein Seil straff gespannt.
Berechnen Sie die Länge des Seils. (1,5 VP)

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann. (2 VP)

c) Auf der Hochfläche, einen Meter vom Übergang zum Hang entfernt, steht ein vertikaler Lichtmast, von dem aus das gesamte Gelände ausgeleuchtet werden kann. Berechnen Sie die Mindestlänge dieses Lichtmasts. (2,5 VP)

d) Bei einem Umbau soll die Senke auf 5m Länge so mit Sand aufgefüllt werden, dass eine horizontale rechteckige Fläche entsteht, die 0,5m oberhalb des tiefsten Punktes der Senke liegt.
Berechnen Sie das Volumen des dafür benötigten Sandes. (3,5 VP)



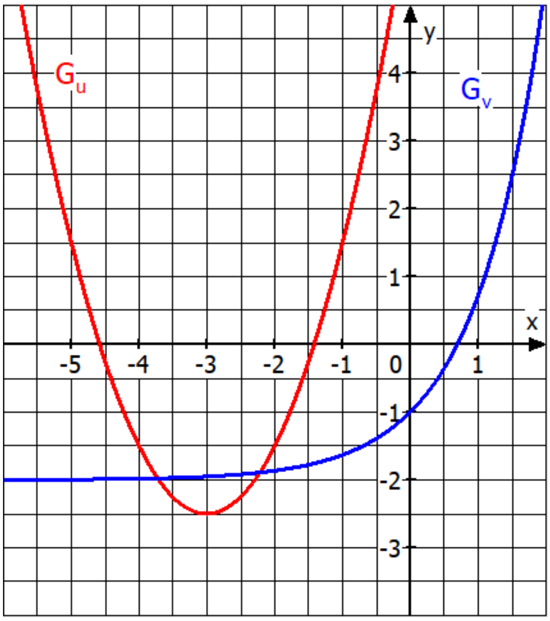
Aufgabe A 1.2

Abgebildet sind die Graphen G_u und G_v zweier Funktionen u und v.

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = v(u(x))$.

Bestimmen Sie f(-1). (1 VP)

Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f im abgebildeten Bereich. (1,5 VP)



Aufgabe 1.3

Die Funktion w ist auf $\mathbb{R}$ definiert und zweimal differenzierbar.

Für die Funktion g gilt $g(x) = e^{w(x)} - 2$.
Zeigen Sie: Wenn x_0 eine Wendestelle von w und von g ist, dann hat der Graph von w bei x_0 eine waagrechte Tangente.

(3 VP)

Aufgabe A 2.1

Die Funktion f beschreibt für $0 \le t \le 8$ modellhaft die Wachstumsgeschwindigkeit eines Apfelbaums, der zu Beobachtungsbeginn 0,8m hoch ist (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, f(t) in Meter pro Jahr).

a) Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen G_f von f.
Bestimmen Sie die Länge des Zeitraums, in dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Apfelbaums größer als 0,5 Meter pro Jahr ist. (1 VP)

Bestimmen Sie die Höhe des Apfelbaums zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn. (2 VP)

Die Wachstumsgeschwindigkeit eines Birnbaums, der zu Beobachtungsbeginn 1,2 m hoch ist, wird für $0 \le t \le 8$ modellhaft beschrieben durch die Funktion g mit
$g(t) = t^2 \cdot e^{-t}$ (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, g(t) in Meter pro Jahr).

Für die Ableitungen der Funktion g gilt:
$g'(t) = 2t \cdot e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t}$ $\quad$ $g''(t) = 2e^{-t} - 4t \cdot e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t}$

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des Birnbaums am größten ist, und geben Sie diese Wachstumsgeschwindigkeit an. (2 VP)

Begründen Sie, dass der Birnbaum ab diesem Zeitpunkt weiterhin wächst, die Wachstumsgeschwindigkeit jedoch ständig abnimmt. (2 VP)

Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung
$\frac{1}{5} \cdot \int_x^{x+5} g(t)dt = 0,3$ führt. (1,5 VP)

c) Zeigen Sie, dass für $0 \le t \le 8$ die Funktion h mit
$h(t) = (-t^2 - 2t - 2) \cdot e^{-t} + 3,2$
die Höhe des Birnbaums beschreibt (t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, h(t) in Meter). (2 VP)

d) Durch die Zugabe eines Düngers wird das Wachstums von Birnbäumen beeinflusst. Die Höhe eines gedüngten Birnbaums wird durch die Funktion k beschrieben mit $k(t) = -2,3e^{-t} + 3,5$
($t \ge 0$ in Jahren nach Beobachtungsbeginn, k(t) in Meter).
Die Höhe eines ungedüngten Birnbaums wird weiterhin durch die Funktion h beschrieben. Beide Birnbäume haben zu Beobachtungsbeginn dieselbe Höhe.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des gedüngten Birnbaums größer ist als die des ungedüngten Birnbaums.
Untersuchen Sie rechnerisch, welcher der beiden Bäume zuerst eine Höhe von 3,1 m erreicht. (1,5 VP)

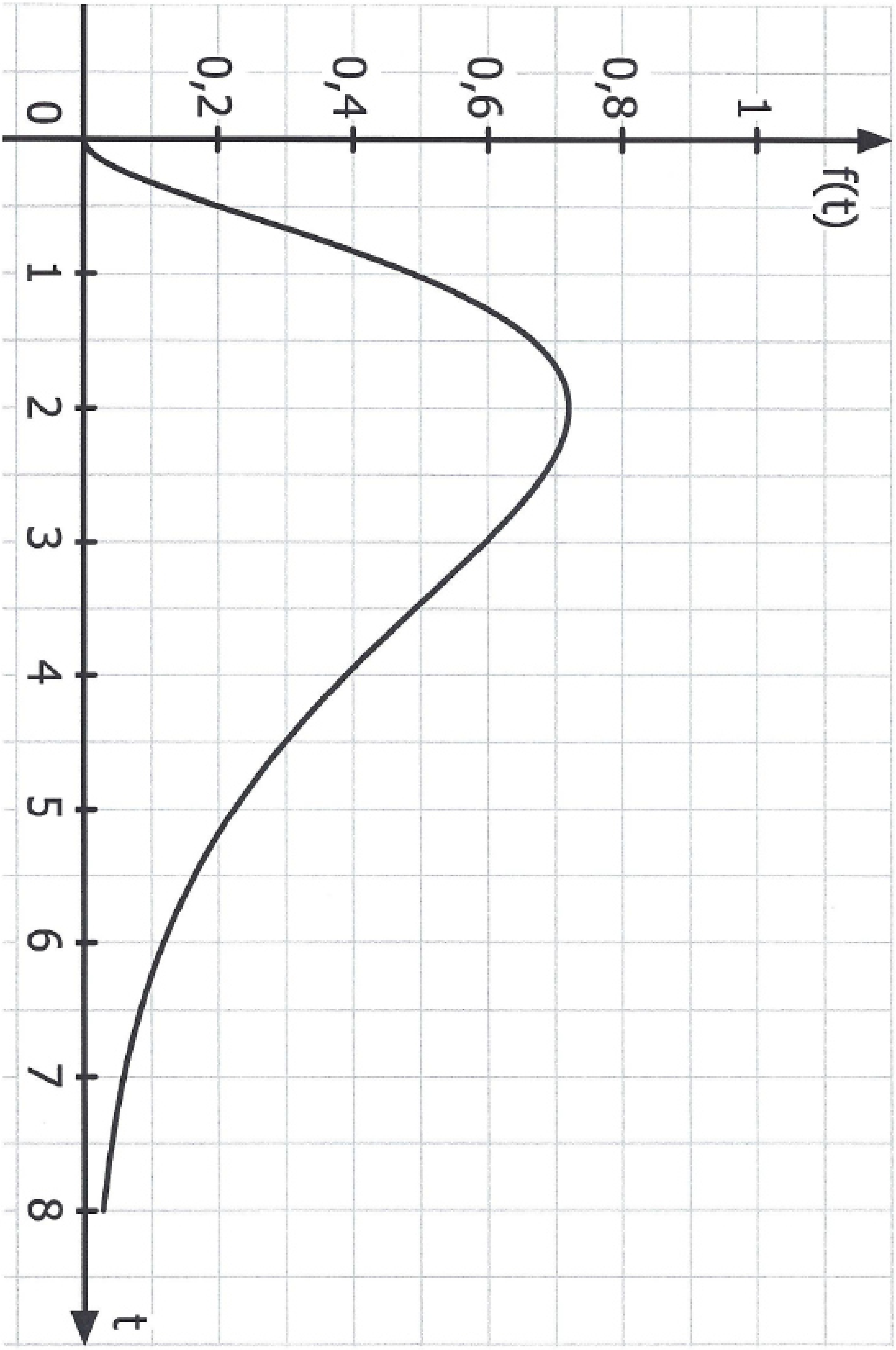
Aufgabe A 2.2

Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -4x^3 + 12tx^2$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_t. (1 VP)
Der Graph von f_t schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt A_t ein.
Ermitteln Sie denjenigen Wert von t, für den $A_t = \frac{16}{3}$ gilt. (2,5 VP)

b) Für $t = \frac{2}{3}$ gibt es Tangenten an den Graphen von f_t, die den Punkt S(3|0) enthalten.
Berechnen Sie die x-Koordinaten der zugehörigen Berührpunkte. (2,5 VP)

Abbildung zu Aufgabe A 2.1



Aufgabe B1

Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Die Eckpunkte der Grundfläche sind A(-3|-3|0), B(3|-3|0), C(3|3|0) und D,
die Spitze ist S(0|0|6).
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und S.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar. (1 VP)
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E. (2 VP)
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide. (2 VP)
(Teilergebnis: E: $2x_2 - x_3 = -6$)

b) Innerhalb der Pyramide gibt es einen Punkt, dessen Abstand von der Grundfläche der Pyramide $\sqrt{5}$-mal so groß ist wie sein Abstand zu den Seitenflächen.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes. (2,5 VP)

c) Betrachtet wird für jedes a > 0 die gerade Pyramide mit folgenden Eigenschaften:

- A(-a|-a|0), B(a|-a|0), C(a|a|0) und D sind die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche.
- Die x_3-Koordinate der Spitze S ist positiv.
- Die Höhe der Pyramide stimmt mit der Kantenlänge der Grundfläche überein.

M_1 ist die Kantenmitte von AB, M_2 die Kantenmitte von DS.
Zeigen Sie: Die Strecke $\overline{M_1M_2}$ ist orthogonal zur Kante DS. (2,5 VP)

Aufgabe B2

Eine Firma stellt Gewächshäuser her. Die Ecken der Grundfläche dieser Gewächshäuser können modellhaft durch die Punkte A(8|0|0), B(8|7|0), C(0|7|0) und D(0|0|0) beschrieben werden. In diesen Ecken stehen senkrecht zur Grundfläche Pfosten, die das Dach des Gewächshauses tragen (alle Koordinatenangaben in Meter).

a) Bei einem dieser Gewächshäuser können die Ecken der Dachfläche durch die Punkte E(8|0|4), F(8|7|5), G(0|7|5) und H(0|0|4) beschrieben werden.
Stellen Sie dieses Gewächshaus in einem geeigneten Koordinatensystem dar. (1 VP)

Berechnen Sie den Rauminhalt dieses Gewächshauses. (1,5 VP)
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die die Lage der Dachfläche beschreibt. (2 VP)

b) Die Firma bietet die Gewächshäuser mit unterschiedlichen Neigungen der Dachfläche an. Die Lage jeder dieser Dachflächen kann durch eine Ebene beschrieben werden, die zur Schar $E_a: ax_2 - 7x_3 = 7a - 35$ mit $a \geq 0$ gehört.

Berechnen Sie den Wert von a, für den die Neigung der Dachfläche 30° beträgt. (2 VP)
Es gibt eine Gerade g, die in allen Ebenen der Ebenenschar liegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden g. (1,5 VP)

Untersuchen Sie, für welche Werte von a im gesamten Gewächshaus eine Mindesthöhe von 2m gegeben ist. (2 VP)

Aufgabe C1

Ein Unternehmen füllt Honig in Gläser mit der Aufschrift 250g ab. Die Füllmenge X eines Glases wird als normalverteilt angenommen mit dem Erwartungswert $\mu = 252$ und der Standardabweichung $\sigma = 2$ (alle Angaben in g).

a) Ein Glas wird zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 250g Honig in diesem Glas sind. (0,5 VP)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge dieses Glases um höchstens 2% von 250g abweicht. (1,5 VP)

b) Gesucht ist ein Wert $a \neq 245$ mit $P(a \leq X \leq a+5) = P(245 \leq X \leq 250)$.
Begründen Sie, dass es solch einen Wert von a gibt und geben Sie diesen Wert an. (1,5 VP)

c) Bei einer neuen Abfüllanlage beträgt die Standardabweichung der Füllmenge 1g. Bei ihr kann man durch einen Regler den Erwartungswert der Füllmenge mit einer Genauigkeit von 0,1g einstellen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Glas weniger als 250g enthält, soll höchstens 15% betragen. Ermitteln Sie, auf welchen Wert der Erwartungswert der Füllmenge mindestens eingestellt werden muss. (1,5 VP)

Bei einer Sonderaktion wird jedes fünfte Glas auf der Deckelinnenseite mit einem von außen nicht sichtbaren Gutschein versehen.

d) Lena kauft während der Sonderaktion sechs Gläser und stellt sie in einer Reihe auf. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Genau drei dieser Gläser enthalten jeweils einen Gutschein.“ (0,5 VP)
B: „Die beiden ersten Gläser enthalten jeweils einen Gutschein.“ (1 VP)
C: „In genau zwei Gläsern befindet sich jeweils ein Gutschein, und diese Gläser stehen nicht unmittelbar nebeneinander.“ (1,5 VP)

e) Die Gläser werden in Kartons abgepackt und an Lebensmittelgeschäfte ausgeliefert. Jeder Karton enthält 30 Gläser. Ein Kunde nimmt drei Gläser aus dem Karton und hofft, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einen Gutschein zu erhalten.
Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser mit Gutschein, die sich dafür mindestens in dem Karton befinden müssen. (2 VP)

Aufgabe C2.1

Bei einem Glücksrad gibt es drei farbige Sektoren. Beim einmaligen Drehen beträgt die Wahrscheinlichkeit für rot 60%, für blau 30% und für grün 10%.

a) Das Glücksrad wird 20-mal gedreht. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau 15-mal erscheint rot." (0,5 VP)
B: „Bei den ersten zehn Drehungen erscheint genau zweimal blau, insgesamt erscheint höchstens fünfmal blau." (2 VP)

b) Bei einem Glücksspiel darf man für einen Einsatz von 6€ das Glücksrad zweimal drehen. Wenn dabei genau einmal rot erscheint, dann erhält man einen bestimmten Auszahlungsbetrag. Wenn zweimal rot erscheint, dann erhält man das Siebenfache dieses Auszahlungsbetrags. Andernfalls erfolgt keine Auszahlung. Das Spiel ist fair.
Bestimmen Sie den Auszahlungsbetrag für den Fall, dass genau einmal rot erscheint. (2,5 VP)

c) Jemand vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für rot in Wirklichkeit geringer als 60% ist. Deshalb soll ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für rot ausgegangen wird. Formulieren Sie eine Nullhypothese, die dieser Zielsetzung entspricht, und begründen Sie Ihre Wahl. (1,5 VP)

Aufgabe C2.2

Bei einem Spielautomaten wird vermutet, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit p größer als 10% ist.
Die Vermutung wird mit Hilfe eines Hypothesentests mit dem Stichprobenumfang von n = 200 und einem Signifikanzniveau von 5% getestet.
Als Nullhypothese wird $H_0: p \geq 0{,}1$ gewählt.
Formulieren Sie die Entscheidungsregel. (2,5 VP)

Tatsächlich gilt p = 0,08.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art.