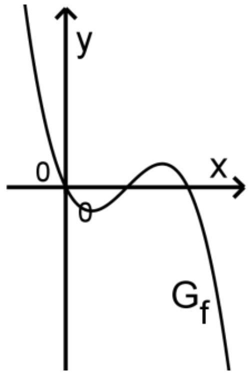
Teil I

Aufgaben aus dem IQB-Pool für den Pflichtteil

Aufgabe I.1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f, der bei $x = 1$ den Wendepunkt W hat.



a) Zeigen Sie, dass die Tangente an G_f im Punkt W die Steigung 1 hat.

b) Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung m, die durch W verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit G_f in Abhängigkeit von m an.

<u>Lösungshinweise</u>

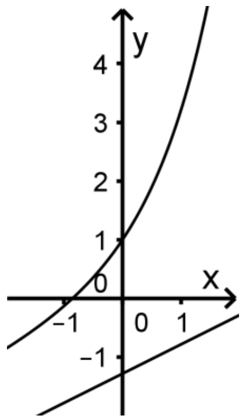
a) $f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$, $f'(1) = 1$

b) Die Anzahl der Schnittpunkte ist 3 für $0 < m < 1$ und 1 für $m \geq 1$.

Aufgabe I.2

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen.



b) Für eine positive reelle Zahl c wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g_c. Die beiden Graphen schließen mit der y-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Berechnen Sie c.

<u>Lösungshinweise</u>

a) Die Funktionsterme von f und g unterscheiden sich nur in den Summanden e^x bzw. –1. Es gilt $e^x \neq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $\int_0^1 \left(f(x) - g_c(x)\right)dx = \int_0^1 \left(e^x + c\right)dx = \left[e^x + cx\right]_0^1 = e + c - 1$

$e + c - 1 = 3 \Leftrightarrow c = 4 - e$

Aufgabe I.3

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

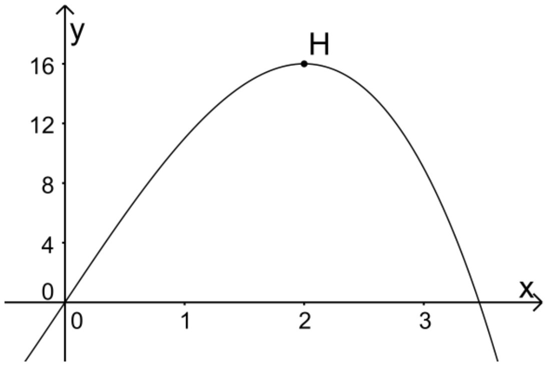
b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Lösungshinweise

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{2}x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=2\cdot\ln\frac{1}{2}$

b) $f'(x)=e^{\frac{1}{2}x}$, Steigung der Tangente: $f'(0)=1$. Folglich ist ein Winkel des Dreiecks 45° groß. Da die Koordinatenachsen einen rechten Winkel einschließen, beträgt die Größe des dritten Winkels ebenfalls 45°. Damit stimmen zwei Winkel des Dreiecks überein.

Aufgabe I.4



Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x)=-x^3+12x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.

a) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x=2$ schließen für $0\le x\le 2$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen für $0\le x\le 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y-Achse.

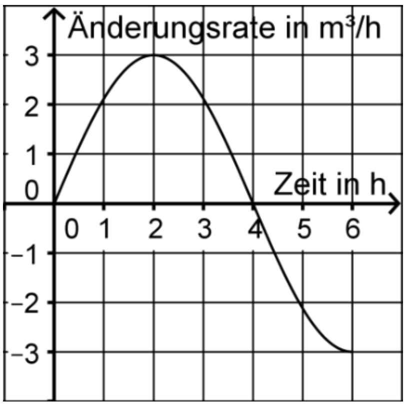
Lösungshinweise

a) $\int_0^2 f(x)\,dx=\left[-\frac{1}{4}x^4+6x^2\right]_0^2=20$

b) Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $y=16$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt $2\cdot 16-20=12$ ein, die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y=16$ und die Gerade g also eine Fläche mit dem Inhalt $20-12=8$.

$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot h=8 \Leftrightarrow h=8$, Schnittpunkt $S(0|24)$.

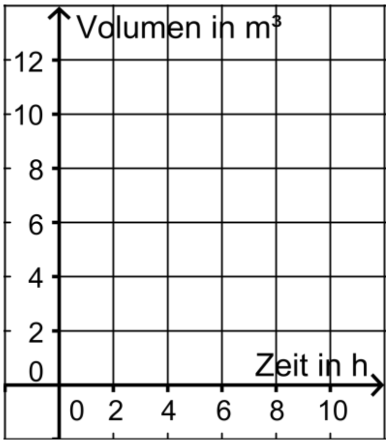
Aufgabe I.5



Die Abbildung stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank $2m^3$ Wasser.

a) Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.

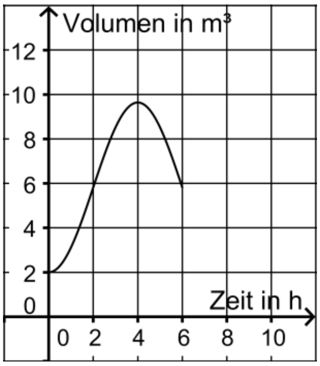
b) Skizzieren Sie in der Abbildung rechts den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.



Lösungshinweise

a) Durch Kästchenzählen ermittelt man einen Zufluss von ca. $3{,}8\ \text{m}^3$. Also befinden sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn etwa $5{,}8\ \text{m}^3$ Wasser im Tank.

b)



Aufgabe I.6

Gegeben sind die Ebene $E: x_2 - 3x_3 = -19$ sowie die Punkte $P(1|2|2)$, $Q(1|-1|11)$ und $S(-2|-4|5)$.

a) Zeigen Sie, dass S in der Ebene E liegt.

b) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch P und Q senkrecht zu E steht.

c) Die Punkte P und Q haben den gleichen Abstand von der Ebene E. Die Punkte S und P legen die Gerade g fest. Spiegelt man g an E, so erhält man die Gerade h. Geben Sie eine Gleichung von h an.

Lösungshinweise

a) $-4 - 3 \cdot 5 = -19$

b) Für $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ der Ebene gilt $\overrightarrow{PQ} = -3 \cdot \vec{n}$.

c) Bezeichnet man den Koordinatenursprung mit O, so gilt: $h: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SQ}$, $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe I.7

Der Punkt $P(0|1|5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass das Quadrat in der x_2x_3-Ebene liegt.

b) Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade g, der Punkt $Q(0|8|4)$ in der x_2x_3-Ebene. Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind.

<u>Lösungshinweise</u>

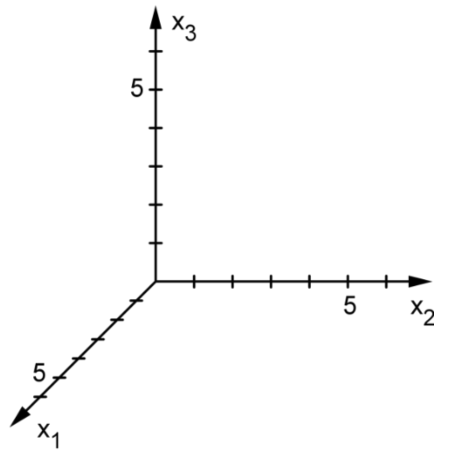
a) P liegt in der x_2x_3-Ebene, der Richtungsvektor von g steht senkrecht dazu.

b) Schnittpunkt der Diagonalen: $S(0|4|1)$.

Mit $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\overrightarrow{SQ}\right|$ und $\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SQ} = 0$.

Aufgabe I.8

Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

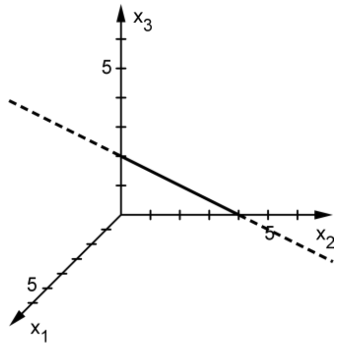


a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittgerade von E mit der x_2x_3-Ebene ein.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E und g.

<u>Lösungshinweise</u>

a)



b) $2 + 2t + 1 - t + 2 \cdot (-2 - 3t) = 4 \Leftrightarrow t = -1$. Damit $S(0|2|1)$.

Aufgabe I.9

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

a) Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist.

<u>Lösungshinweise</u>

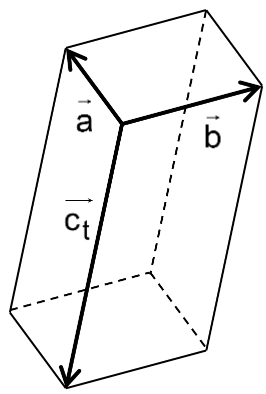
a) Schnittpunkte von E mit der x_1- und x_2-Achse: $S_1(-9\,|\,0\,|\,0)$, $S_2(0\,|\,-18\,|\,0)$,
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$

b) Jeder Normalenvektor von E hat die Form $\begin{pmatrix} 2r \\ r \\ -2r \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$2 \cdot 2r + r - 2 \cdot (-2r) = -18 \Leftrightarrow r = -2$. Damit $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe I.10

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.



a) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

<u>Lösungshinweise</u>

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c_t} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c_t} = 0$

b) $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\overrightarrow{c_t}| = 15 \Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{45} \cdot |t| = 15 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{3}$

Aufgabe I.11

Der Punkt $A(-2\,|\,3\,|\,\sqrt{12})$ ist bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrisch zum Punkt B. Die Punkte $C_r(3r\,|\,2r\,|\,0)$ mit $r \in \mathbb{R}$ bilden eine Gerade g, die im Koordinatenursprung senkrecht zur Geraden durch A und B steht. Bestimmen Sie alle Werte von r, für die A, B und C_r Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt 65 sind.

Lösungshinweise

$B\left(2\,|\,-3\,|\,-\sqrt{12}\right)$, $\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC_r}\right| = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{13r^2} = 65 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{13}$

Aufgabe I.12

Die Zufallsgrößen X und Y können jeweils die Werte 3, 4 und 5 annehmen.

a) Für die Zufallsgröße X gilt: $P(X=3)=\frac{1}{3}$ und $P(X=4)=\frac{1}{4}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

b) Für die Zufallsgröße Y gilt: $P(Y=3)=\frac{1}{3}$, $P(Y=4)\geq\frac{1}{6}$ und $P(Y=5)\geq\frac{1}{6}$. Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von Y infrage kommen.

Lösungshinweise

a) $\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 4+\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot 5=\frac{49}{12}$

b) Mit $\frac{1}{6}\leq P(Y=5)\leq\frac{3}{6}$ ergibt sich $\frac{23}{6}\leq E(Y)\leq\frac{25}{6}$.

Aufgabe I.13

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

a) Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

b) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

Lösungshinweise

a) Mit dem Term kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass bei sieben Drehungen der blaue Sektor nicht getroffen wird.

b) $\binom{10}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^8$

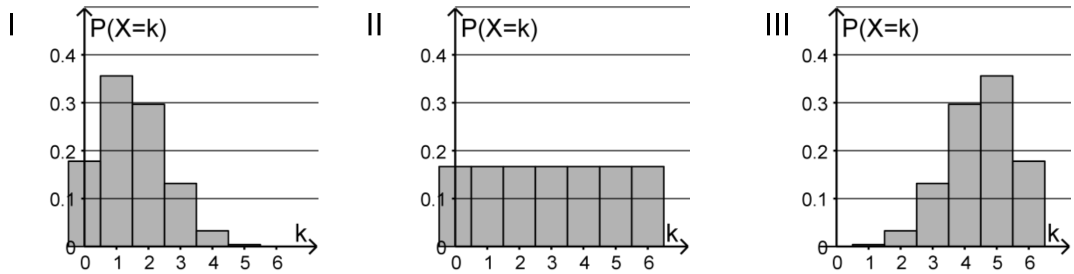
c) Die Aussage ist falsch, da die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der gelbe Sektor getroffen wird, bei allen Drehungen gleich groß ist.

Aufgabe I.14

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt. Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

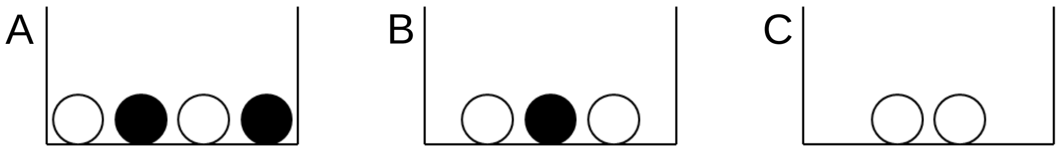
<u>Lösungshinweise</u>

a) $0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$

b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt Abbildung I.
X ist binomialverteilt, der Erwartungswert von X ist $6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Abbildung II zeigt keine Binomialverteilung, Abbildung III eine Verteilung mit einem Erwartungswert, der größer als 1,5 ist.

Aufgabe I.15

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



a) Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

b) Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:
Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen.

Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.
Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

Lösungshinweise

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$; $\frac{5}{18}\cdot(x-1)+\frac{13}{18}\cdot(-1)=0 \Leftrightarrow x=3{,}6$.
Der Geldbetrag muss 3,60 Euro betragen.

Aufgabe I.16

Die binomialverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1 = 0{,}8$ bzw. $p_2 = 0{,}2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a) Betrachtet wird die Zufallsgröße X_1. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann.

b) Geben Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term

$$1-\left(\binom{5}{3}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2+\binom{5}{4}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^1+\binom{5}{5}\cdot 0{,}8^5\right)$$

angegeben wird.

c) Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 in Abbildung 2 dar.

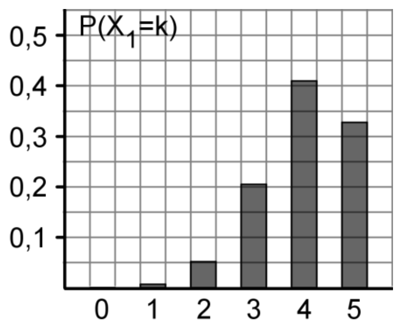


Abb. 1

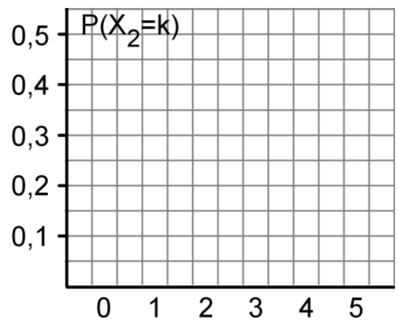
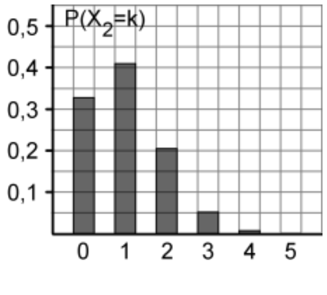


Abb. 2

Lösungshinweise

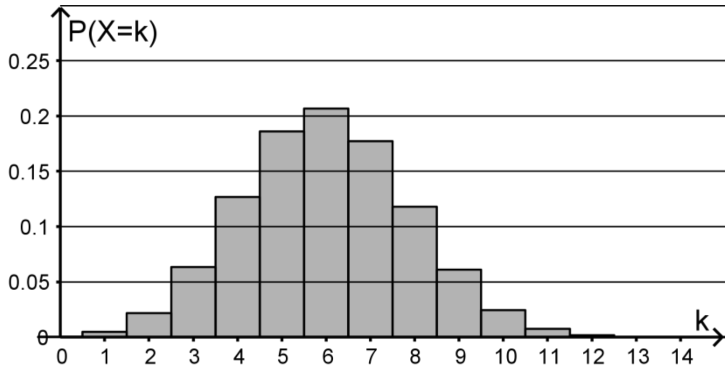
a) $P(X=1)=5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^4$

b) Für X_1 gibt der Term die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass höchstens zwei Treffer erzielt werden.

c)


Aufgabe I.17

Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p.



a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Wahrscheinlichkeit $P(5 \leq X \leq 7)$.

b) X hat den Erwartungswert 6 und die Standardabweichung $\sqrt{3{,}6}$.
Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von n und p.

<u>Lösungshinweise</u>

a) $P(5 \leq X \leq 7) \approx 0{,}19 + 0{,}21 + 0{,}18 = 0{,}58$

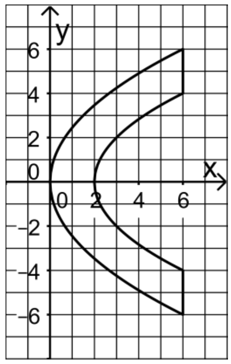
b) Die Gleichungen $n \cdot p = 6$ und $n \cdot p \cdot (1-p) = 3{,}6$ liefern $n = 15$ und $p = 0{,}4$.

Teil II

Aufgaben mit neuen inhaltlichen Anforderungen

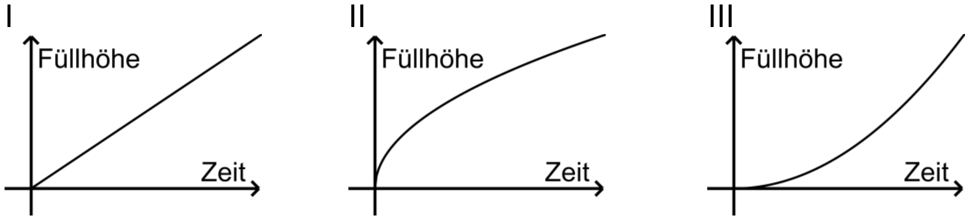
Aufgabe II.1

Betrachtet wird eine große rotationssymmetrische Schale, die aus einem Steinblock gefertigt wurde. Ein Kubikmeter des Steins hat eine Masse von 2700kg.
In einem Koordinatensystem kann ein Querschnitt der Schale mithilfe der Graphen der Funktionen p und q mit $p(x) = \sqrt{6x}$, $0 \le x \le 6$ und $q(x) = \sqrt{4x-8}$, $2 \le x \le 6$ modellhaft dargestellt werden.
Dabei beschreibt die x-Achse die Rotationsachse der Schale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1dm (vgl. Abbildung).



a) Interpretieren Sie den Term $p(6) - q(6)$ im Sachzusammenhang.

b) In die aufrecht stehende Schale wird mit konstanter Zuflussrate Wasser gefüllt. Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III für diesen Vorgang die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



c) Weisen Sie nach, dass sich bei dem beschriebenen Füllvorgang der Flächeninhalt A der Wasseroberfläche (in dm^2) in Abhängigkeit von der Füllhöhe h (in dm) mithilfe der Gleichung $A(h) = 4\pi h$ berechnen lässt.

d) Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion s mit $s(x) = \pi \cdot \int_2^{2+x} \left(q(t)\right)^2 dt$ und geben Sie den größten Definitionsbereich von s an, der im Sachzusammenhang sinnvoll ist.

e) Berechnen Sie die Masse der Schale.

<u>Lösungshinweise</u>

a) Der Term gibt die Breite des Rands der Schale in Dezimetern an.

b) Der Graph II beschreibt die Füllhöhe. Da der Durchmesser der Schale nach oben hin zunimmt, nimmt die Änderungsrate der Füllhöhe mit der Zeit ab.

c) $A(h) = \pi \cdot \left(q(2+h)\right)^2 = 4\pi h$

d) Die Funktion s beschreibt das Volumen des Wassers in der Schale in dm^3 in Abhängigkeit von der Füllhöhe x in dm.
$D = [0;4]$

e) $V = \pi \cdot \int_0^6 \left(p(x)\right)^2 dx - \pi \cdot \int_2^6 \left(q(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \left[3x^2\right]_0^6 - \pi \cdot \left[2x^2 - 8x\right]_2^6 = 76\pi$

$M = V \cdot 2{,}7 \approx 645$, somit wiegt die Schale etwa 645 kg.

Aufgabe II.2

Bestimmen Sie für $r \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 4r \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = & 8r \end{array}$$

Lösungshinweise

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & -3 & 4r \\ 2 & 3 & -3 & 8r \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 4r-12 \\ 0 & 5 & -4 & 8r-6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 4r-12 \\ 0 & 0 & 1 & 4r+6 \end{array}\right)$$

$L_r = \left\{\left(\frac{14}{5}r + \frac{18}{5};\ \frac{24}{5}r + \frac{18}{5};\ 4r+6\right)\right\}$

Aufgabe II.3

Zwei Schülerinnen lösen dasselbe lineare Gleichungssystem. Sie erhalten die Lösungsmengen $L_1 = \{(2+r;\ 1+r;\ 3-r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ bzw. $L_2 = \{(1-s;\ -s;\ 4+s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.
Untersuchen Sie, ob diese Lösungsmengen identisch sind.

Lösungshinweise

Die beiden Lösungsmengen lassen sich als Geraden interpretieren:

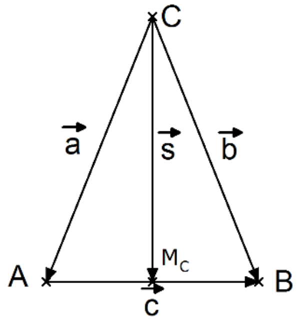
$L_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R})$, $L_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$.

Da die Richtungsvektoren von L_1 und L_2 kollinear sind und der Punkt $P(2|1|3)$ auf beiden Geraden liegt ($r = 0, s = -1$), sind die Geraden und somit die Lösungsmengen identisch.

Aufgabe II.4

Beweisen Sie: Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck ABC der Punkt M_C der Mittelpunkt der Basis AB ist, dann ist die Strecke CM_C orthogonal zu AB.

<u>Lösungshinweise</u>



Voraussetzung: (1) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, (2) $\overrightarrow{AM_C} = \frac{1}{2}\vec{c}$

Behauptung: $\vec{c} \perp \vec{s}$

Beweis:

Nach (2) ist $\vec{s} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$, mit $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$ erhält man

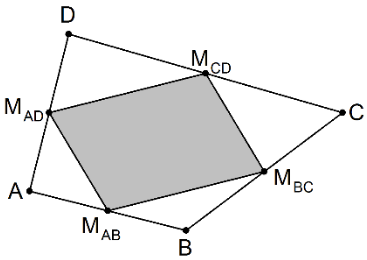
$\vec{s} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

$\vec{s} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b}^2 - \vec{a}^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\right) \overset{(1)}{=} 0$. Also gilt $\vec{c} \perp \vec{s}$. ❏

Aufgabe II.5

Beweisen Sie: Die Seitenmitten eines Vierecks ABCD bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms (Satz von Varignon).

<u>Lösungshinweise</u>



Bezeichnungen: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$

Voraussetzung: $\overrightarrow{AM_{AB}} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CM_{CD}} = \frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{DM_{AD}} = \frac{1}{2}\vec{d}$

Behauptung: $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AD}M_{CD}}$

Beweis:

$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ und $\overrightarrow{M_{AD}M_{CD}} = -\frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\left(-\vec{d} - \vec{c}\right)$

Es ist $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} = -\vec{d} - \vec{c}$ und somit $\overrightarrow{M_{AD}M_{CD}} = \frac{1}{2}\left(-\vec{d} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}$. ❏

Aufgabe II.6

Gegeben sind eine Ebenenschar $E_k: 3x_1 + kx_2 - kx_3 = 6$ $(k \in \mathbb{R})$ sowie die Gerade g durch die Punkte $P(4\,|\,7\,|\,7)$ und $Q(1\,|\,2\,|\,9)$.

a) Untersuchen Sie die Ebenen E_k der Schar auf Parallelität zur Geraden g und Orthogonalität zur Geraden g.

b) Bestimmen Sie k so, dass E_k orthogonal zu E_1 ist.
Untersuchen Sie, ob es eine Ebene E_k gibt, die zu keiner anderen Ebene der Schar orthogonal ist.

c) Es gibt genau einen Wert von k, für den der Abstand des Punktes P von der Ebene E_k maximal wird. Untersuchen Sie, welche besondere Lage die zugehörige Ebene hat.
Die Kugel K besitzt den Mittelpunkt P und hat den Radius 1. Bestimmen Sie Werte für k so, dass die Ebene E_k keinen gemeinsamen Punkt mit der Kugel K hat.

d) Zeigen Sie, dass es eine Gerade h gibt, die in allen Ebenen E_k liegt. Ermitteln Sie die Gleichung einer Ebene F, die h enthält, aber nicht zur Ebenenschar E_k gehört.

d*) Untersuchen Sie, welche Punkte der x_2x_3-Ebene in keiner Ebene E_k liegen.

Lösungshinweise

a) Normalenvektor von E_k ist $\overrightarrow{n_k} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -k \end{pmatrix}$, Richtungsvektor von g ist $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Parallelität: $E_k \parallel g \Leftrightarrow \overrightarrow{n_k} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -9 - 7k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{7}$

Orthogonalität: $E_k \perp g \Leftrightarrow \overrightarrow{n_k} = t \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -k \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3 = -3t \Leftrightarrow t = -1 & \\ k = -5t & \Rightarrow k = 5 \\ k = -2t & \quad k = 2 \end{matrix}$

Widerspruch! Keine Ebene E_k ist orthogonal zu g.

b) Bestimmung von k: $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_k} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ -k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9 + 2k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{2}$

Untersuchung: $\overrightarrow{n_{k_1}} \cdot \overrightarrow{n_{k_2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ k_1 \\ -k_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ k_2 \\ -k_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9 + 2k_1k_2 = 0$

Für $k_1 = 0$ hat die Gleichung $9 + 2k_1k_2 = 0$ keine Lösung.
Die Ebene E_0 ist zu keiner anderen Ebene der Schar orthogonal.

c) Abstand: $d(P, E_k) = \frac{|12 + 7k - 7k - 6|}{\sqrt{9 + 2k^2}} = \frac{6}{\sqrt{9 + 2k^2}}$ wird offensichtlich maximal für $k = 0$.

Die Ebene $E_0 : 3x_1 = 6$ ist parallel zur x_2x_3-Ebene.

Kugel: Der Ansatz $d(P, E_k) = 1$ führt auf $\underbrace{\sqrt{9 + 2k^2}}_{>0} = 6 \Leftrightarrow k^2 = \frac{27}{2}$ mit den Lösungen

$k_1 = \frac{3}{2}\sqrt{6}$ und $k_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{6}$. Der Wert des Terms $d(P, E_k)$ wird groß, wenn k betragsmäßig klein wird. Somit muss gelten $-\frac{3}{2}\sqrt{6} < k < \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

d) Nachweis: Die Schnittgerade der Ebenen E_0 und E_1 hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Einsetzen in die Gleichung von E_k führt auf $3 \cdot 2 + k \cdot t - k \cdot t = 6$. Also liegt diese Gerade in allen Ebenen der Schar.

Ebene F: Damit der Normalenvektor von F orthogonal zum Richtungsvektor von h ist, muss er die Form $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ -n_2 \end{pmatrix}$ haben. Für $n_1 = 0$ ist $\vec{n}$ kein Normalenvektor einer Ebene

E_k. Folglich ist $F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ eine Gleichung einer solchen Ebene.

d*) Alle Punkte $R(r_1 | r_2 | r_3)$ der x_2x_3-Ebene haben die Koordinate $r_1 = 0$. Punktprobe mit E_k führt zur Gleichung $kr_2 - kr_3 = 6 \Leftrightarrow k(r_2 - r_3) = 6$, die für $r_2 = r_3$ keine Lösung besitzt. Somit sind die Punkte der x_2x_3-Ebene, die auf keiner Ebene der Schar liegen, die Punkte $P(0 | r_2 | r_2)$ mit $r_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe II.7

Gegeben sind die Punkte $P(2 | -1 | 0)$ und $Q(1 | 2 | -11)$, die Geradenschar

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 3a-1 \\ -11a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(a, t \in \mathbb{R})$ und die Ebene $E: x_1 + 4x_2 + x_3 = -2$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P auf der Geraden g_0 liegt.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte auf g_0, die von P den Abstand 12 haben.
Bestimmen Sie, auf welcher Geraden g_a der Punkt Q liegt.

b) Begründen Sie, dass die Geraden g_0 und die x_1-Achse zueinander windschief sind.
Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g_0 von der x_1-Achse.

c) Untersuchen Sie, welche gegenseitige Lage die Geraden g_{a_1} und g_{a_2} $(a_1 \neq a_2)$ haben.
Zeigen Sie, dass durch die Geradenschar g_a und die Ebene E dieselbe Punktmenge beschrieben wird.

d) Der Punkt T liegt auf keiner Geraden der Schar. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem diejenige Gerade der Schar ermittelt werden kann, die den kleinsten Abstand von T hat.

<u>Lösungshinweise</u>

a) Nachweis: $g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$, somit liegt P auf g_0.

Punkte auf g_0: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} \pm 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, somit $R_1(-6 | 3 | -8)$ und $R_2(10 | -5 | 8)$.

Bestimmung der Geraden: Punktprobe $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ -1+3a \\ -11a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ führt zum LGS

$$\begin{array}{rrcr} -a & -2t & = & -1 \\ 3a & +t & = & 3 \\ -11a & -2t & = & -11 \end{array}$$ mit der Lösung $a = 1,\ t = 0$.

Somit liegt der Punkt Q auf der Geraden g_1.

b) Lage: Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ von g_0 ist kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Außerdem hat die Gleichung $s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ keine Lösung.

Abstand: Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu beiden Richtungsvektoren.

Damit $d = \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

c) gegenseitige Lage: Da beide Geraden denselben Richtungsvektor haben, sind sie parallel zueinander. Der Verbindungsvektor der beiden Aufpunkte $\begin{pmatrix} 2-a_2 \\ 3a_2-1 \\ -11a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-a_1 \\ 3a_1-1 \\ -11a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_2-a_1) \\ 3(a_2-a_1) \\ -11(a_2-a_1) \end{pmatrix}$ ist wegen $a_1 \neq a_2$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Also sind g_{a_1} und g_{a_2} echt parallel.

Nachweis: Die Ebene $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(r, s \in \mathbb{R})$ ist die von der Geradenschar aufgespannte Ebene. Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ ist der Normalenvektor von E auch ein Normalenvektor von F. Da $1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -2$, liegt P in E, und somit gilt $E = F$.

d) Man ermittelt die Hilfsgerade k, die T enthält und orthogonal zu E ist.
Man bestimmt den Schnittpunkt S von k und E.
Man ermittelt die Gerade g_a, auf der S liegt.

Aufgabe II.8

Die Zufallsgröße X beschreibt die Körpergröße von Neugeborenen in mm. Sie wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 522$ und der Standardabweichung $\sigma = 19$ angenommen. Ein Neugeborenes wird zufällig ausgewählt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße kleiner als 500 mm ist.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße um höchstens 20 mm vom Erwartungswert von X abweicht.

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass seine Körpergröße um höchstens a mm vom Erwartungswert von X abweicht, beträgt mindestens 80 %. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl a, für die diese Aussage zutrifft.

<u>Lösungshinweise</u>

X ist $N_{522;19}$-verteilt.

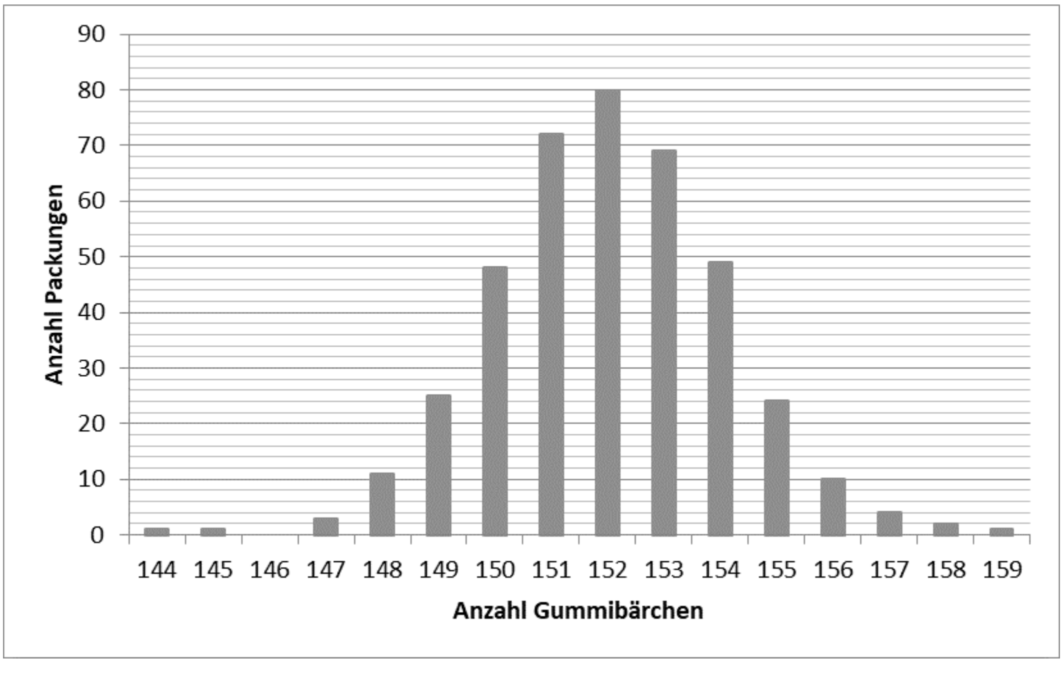
a) $P(X < 500) \approx 0{,}123$

b) $P(502 \le X \le 542) \approx 0{,}707$

c) Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl a mit $P(522 - a \le X \le 522 + a) \ge 0{,}8$.
Für $a = 24$ ist $P(522 - a \le X \le 522 + a) \approx 0{,}793$.
Für $a = 25$ ist $P(522 - a \le X \le 522 + a) \approx 0{,}812$.
Somit ist $a = 25$.

Aufgabe II.9

Es wurden stichprobenartig 400 Standardpackungen Gummibärchen untersucht und das Ergebnis in einem Säulendiagramm festgehalten.



a) Ermitteln Sie auf der Basis der Stichprobe die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standardpackung mindestens 150 und höchstens 152 Gummibärchen enthält.

Die Anzahl der Gummibärchen in einer Standardpackung aus der laufenden Produktion soll durch eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern μ und σ modelliert werden.

b) Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe des Säulendiagramms einen Näherungswert für μ bestimmen kann.

Aus den Daten des Diagramms erhält man näherungsweise $\mu = 152$ und $\sigma = 2$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standardpackung mindestens 150 und höchstens 152 Gummibärchen enthält.

d) Der laufenden Produktion werden 100 Standardpackungen zufällig entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter höchstens vier Standardpackungen mit weniger als 149 Gummibärchen befinden.

Lösungshinweise

a) Anzahl der Packungen mit 150, 151 oder 152 Packungen: $48 + 72 + 80 = 200$.
Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit 50 %.

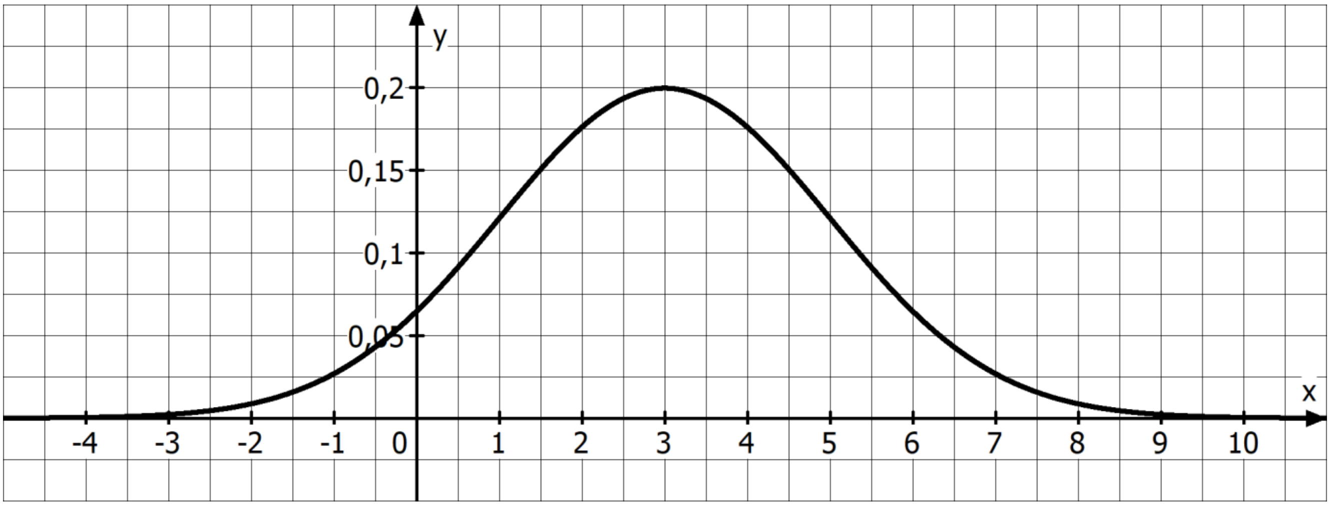
b) Für jede Gummibärenanzahl bildet man das Produkt aus dieser Anzahl mit der Anzahl der Packungen, welche genau diese Gummibärenanzahl enthalten. Diese Produkte werden aufsummiert und die Summe wird durch 400 geteilt.

c) Unter Berücksichtigung der erforderlichen Stetigkeitskorrektur beträgt die Wahrscheinlichkeit $P(149{,}5 \le X \le 152{,}5) \approx 0{,}493$.

d) Y: Anzahl der Packungen, die weniger als 149 Gummibärchen enthalten. Y ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = P(X \le 148{,}5) \approx 0{,}040$. Also $P(Y \le 4) \approx 0{,}629$.

Aufgabe II.10

Von einer normalverteilten Zufallsgröße X ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion gegeben (siehe Abbildung).



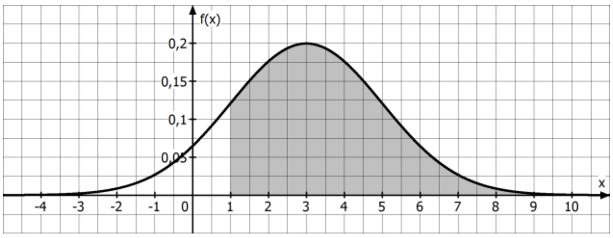
a) Ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung und berechnen Sie $P(X \geq 1)$.

b) Veranschaulichen Sie $P(X \geq 1)$ in der Abbildung.

<u>Lösungshinweise</u>

a) Erwartungswert: Die Symmetrieachse des Graphen ist $x = 3$, somit gilt $\mu = 3$.
Standardabweichung: Die Wendestellen sind bei $x = 3 \pm 2$, also ist $\sigma = 2$.
Wahrscheinlichkeit: $P(X \geq 1) \approx 0,841$.

b)



Aufgabe II.11

X sei eine normalverteilte Zufallsgröße, für welche gilt:
(I) $P(X < -4) = 0,151$ und
(II) $P(X \geq 9) = 0,151$

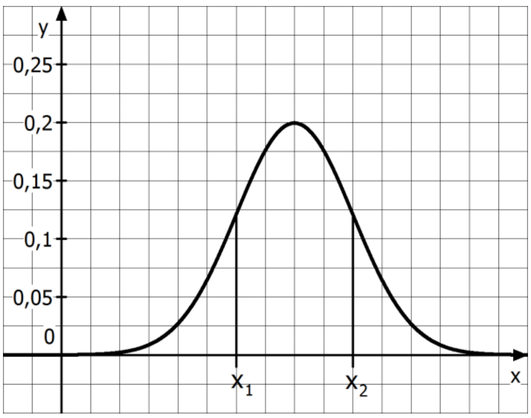
Berechnen Sie den Erwartungswert und bestimmen Sie die Standardabweichung auf eine Dezimale gerundet.

<u>Lösungshinweise</u>

Erwartungswert: Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Normalverteilung folgt aus (I) und (II): $\mu = \dfrac{-4+9}{2} = 2,5$.
Standardabweichung: Gesucht ist der Wert für σ, für den gilt: $P(X < -4) = 0,151$.
Für $\sigma = 6,3$ erhält man $P(X < -4) \approx 0,1511$, für $\sigma = 6,2$ erhält man $P(X < -4) \approx 0,1472$ (WTR).
Also $\sigma \approx 6,3$.

Aufgabe II.12

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ einer normalverteilten Zufallsvariable X. Die Stellen x_1 und x_2 sind die Wendestellen des Graphen.
Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildung je einen Näherungswert für σ und μ jeweils auf eine Dezimale.



Lösungshinweise

Die Funktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ besitzt die Maximumstelle $x = \mu$. Es ist $\varphi_{\mu;\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

und somit $\varphi_{\mu;\sigma}(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Aus der Abbildung lässt sich $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}2$ entnehmen.

Damit erhält man $\sigma \approx \frac{1}{0{,}2\sqrt{2\pi}} \approx 2{,}0$.

Damit ist $x_2 - x_1 \approx 4$, und somit entspricht die Breite eines Kästchens etwa 1 LE,

woraus sich $\mu \approx 8$ ergibt.

Aufgabe II.13

a) Die Funktion g ist eine Dichtefunktion über dem Intervall $[-1;1]$. Geben Sie zwei Eigenschaften an, die g besitzt.

b) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \frac{1}{8}\left(ax^4 - ax^2\right)$.
Untersuchen Sie, ob es einen Wert für a gibt, so dass f_a eine Dichtefunktion über dem Intervall $[-1;1]$ ist.

Lösungshinweise

a) (1) $g(x) \geq 0$ für $x \in [-1;1]$ und (2) $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 1$.

b) $\int_{-1}^{1} f_a(x)dx = \frac{1}{8}a\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{30}a = 1 \Leftrightarrow a = -30$

$f_{-30}(x) = -\frac{15}{4}\left(x^4 - x^2\right) = -\frac{15}{4}x^2\left(x^2 - 1\right)$

Für $x \in [-1;1]$ gilt also $f_{-30}(x) \geq 0$.

Für $a = -30$ ist f_a eine Dichtefunktion über dem Intervall $[-1;1]$.

Aufgabe II.14

Eine Lotteriegesellschaft bietet im großen Stil Rubbellose an. Auf einem Lotterielos sind vier Felder, die jeweils entweder ein Fragezeigen oder ein Ausrufezeichen enthalten. Die Lotteriegesellschaft erklärt in ihrem Gewinnplan, dass alle möglichen Kombinationen gleichwahrscheinlich sind. Bei vier Ausrufezeichen erhält man einen Gewinn.

a) Weisen Sie nach, dass nach den Angaben der Lotteriegesellschaft die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn $\frac{1}{16}$ beträgt.

Eine Spielervereinigung befürchtet, dass die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn kleiner ist als von der Lotterie angegeben. Um dies zu untermauern, soll ein Signifikanztest durchgeführt werden.

b) Formulieren Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese so, dass der Test der Zielsetzung der Spielervereinigung entspricht. Erläutern Sie Ihre Wahl.
Der Test wird mit einem Stichprobenumfang von 200 Losen und einem Signifikanzniveau von 5 % durchgeführt. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

c) Die Spielervereinigung wollte ursprünglich die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn beträgt mindestens $\frac{1}{16}$“ bei einem Stichprobenumfang von 40 Losen auf einem Signifikanzniveau von 5 % testen.
Untersuchen Sie, ob der so konzipierte Test eine brauchbare Information geliefert hätte.

<u>Lösungshinweise</u>

a) Gewinn: $P(\text{"!!!!"}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

b) Wahl der Nullhypothese: Mit dem Test soll die Vermutung $p < \frac{1}{16}$ gestützt werden.
Die zu stützende Vermutung muss die Alternativhypothese darstellen. Somit ist die Nullhypothese $H_0 : p \geq \frac{1}{16}$.
Bestimmung der Entscheidungsregel: X ist die Anzahl der Gewinne unter den 200 Losen.
Zur Bestimmung des Ablehnungsbereichs A ermittelt man die größte natürliche Zahl k mit $P(X \leq k) \leq 0{,}05$, wobei X im Extremfall binomialverteilt mit den Parametern $n = 200$ und $p = \frac{1}{16}$ ist. Es ist $P(X \leq 6) \approx 0{,}031$ und $P(X \leq 7) \approx 0{,}064$.
Entscheidungsregel: Wenn unter den 200 Losen sechs oder weniger Gewinne sind, wird die Nullhypothese verworfen. Ansonsten kann sie nicht verworfen werden.

c) Y sei die Anzahl der Gewinne unter den 40 Losen.
Zur Bestimmung des Ablehnungsbereichs A ermittelt man die größte natürliche Zahl k mit $P(Y \leq k) \leq 0{,}05$, wobei X im Extremfall binomialverteilt mit $n = 40$ und $p = \frac{1}{16}$.
Es gilt aber bereits $P(Y = 0) \approx 0{,}076 > 0{,}05$, so dass man bei der Stichprobe kein Ergebnis im Ablehnungsbereich und damit keine brauchbare Information erhalten kann.

Aufgabe II.15

Es gibt zwei Güteklassen Fliesen. Bei Premiumfliesen beträgt die Wahrscheinlichkeit für Verfärbungen maximal 1 %. Bei Standardfliesen ist die Wahrscheinlichkeit für verfärbte Fliesen höher. Ein Händler erhält eine große Lieferung, bei der die Information, ob es sich um Premiumfliesen handelt, verloren gegangen ist. Anhand einer Stichprobe von 100 zufällig entnommenen Fliesen will der Händler entscheiden, welche Güteklasse die gelieferten Fliesen haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung aufgrund des Tests fälschlicherweise der Güteklasse Standard zugeordnet wird, soll höchstens 2 % betragen. Der Händler wählt als Nullhypothese: „Es handelt sich um eine Lieferung Premiumfliesen.“

a) Begründen Sie, dass diese Wahl der Nullhypothese der vom Händler gegebenen

Zielsetzung entspricht. Bestimmen Sie den zugehörigen Ablehnungsbereich und geben Sie die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit an.
Beurteilen Sie folgende Aussage: „Liegt bei der Durchführung des Tests die Anzahl der verfärbten Fliesen außerhalb des Ablehnungsbereichs, dann trifft die Nullhypothese mit hoher Wahrscheinlichkeit zu.“

b) Der Händler erhält von der Herstellerfirma die Information, dass bei den Standardfliesen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Verfärbungen bei 7,5 % liegt. Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

Lösungshinweise

a) Begründung: Der Fehler, dessen Wahrscheinlichkeit der Händler beschränken möchte, muss beim Test den Fehler 1. Art darstellen. Die falsche Zuordnung der Fliesen zur Güteklasse „Standard“ entspricht der falschen Ablehnung der Annahme, dass es sich um Premiumfliesen handelt. Somit entspricht die Wahl der Nullhypothese der Zielsetzung des Händlers.
Ablehnungsbereich: X: Anzahl der Fliesen mit Verfärbung, $H_0: p \leq 0{,}01$, $H_1: p > 0{,}01$
Falls H_0 zutrifft, ist X im Extremfall $B_{100;0,01}$-verteilt.
Gesucht ist die größte natürliche Zahl k mit $P(X \geq k) \leq 0{,}02 \Leftrightarrow P(X \leq k-1) \geq 0{,}98$.
Es ist $P(X \leq 2) \approx 0{,}921$ und $P(X \leq 3) \approx 0{,}982$, somit ist $k-1=3 \Leftrightarrow k=4$.
$A=\{4; 5;...;100\}$.
Maximale Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha \approx 1-0{,}982=0{,}018$.
Beurteilung: Diese Aussage ist falsch. Wenn man ein Ergebnis außerhalb des Ablehnungsbereichs erhält, liefert der Test keinerlei Information.

b) Beschreibung im Sachzusammenhang: Der Fehler 2. Art besteht darin, fälschlicherweise anzunehmen, dass es sich um Fliesen der Güteklasse „Premium“ handelt.
Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art: Der Fehler 2. Art tritt auf, falls X binomialverteilt ist mit den Parametern $n=100$ und $p=0{,}075$ und die Stichprobe ein Ergebnis $X \leq 3$ liefert. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler ist $\beta = P(X \leq 3) \approx 0{,}053$.

Aufgabe II.16

Ein Würfel soll darauf hin untersucht werden, ob er „gezinkt“ ist. Man einigt sich darauf, ihn in einem Test mehrmals zu werfen und die Anzahl der dabei gewürfelten „Sechser“ zu zählen.

a) Ein Vorschlag hierzu lautet: Der Würfel wird als „gezinkt“ angesehen, wenn bei 150 Würfen weniger als 20-mal oder mehr als 30-mal ein „Sechser“ gewürfelt wird.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Würfel als „gezinkt“ angesehen wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit für einen „Sechser“ tatsächlich $\frac{1}{6}$ ist.

b) Ein anderer Vorschlag hierzu lautet: Es soll ein Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 1 % durchgeführt werden, bei dem der Würfel 500-mal geworfen wird.
Erläutern Sie, welche Art von Signifikanztest geeignet ist, bestimmen Sie eine Entscheidungsregel und berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit.

Lösungshinweise

a) X sei die Anzahl der geworfenen „Sechser". X ist $B_{150;\frac{1}{6}}$-verteilt.
Es ist $P(X \le 19) + P(X > 30) \approx 0{,}227$.

b) Erläuterung: Da es keinen Hinweis auf die Richtung der Abweichung gibt, ist ein zweiseitiger Test geeignet.
Bestimmung der Entscheidungsregel: X sei die Anzahl der geworfenen „Sechser".
$H_0 : p = \frac{1}{6}$, $H_1 : p \ne \frac{1}{6}$. Trifft H_0 zu, so ist X ist $B_{500;\frac{1}{6}}$-verteilt.
Ablehnungsbereich ist $A = \{0,...,k_1\} \cup \{k_2,...500\}$.
Gesucht sind die größte Zahl k_1 mit $P(X \le k_1) \le \frac{1}{2} \cdot 0{,}01$ sowie die kleinste Zahl k_2 mit $P(X \ge k_2) \le \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \Leftrightarrow P(X \le k_2 - 1) \ge 0{,}995$.
Es ist $P(X \le 62) \approx 0{,}0049$ und $P(X \le 63) \approx 0{,}0071$, somit ist $k_1 = 62$.
Weiter ist $P(X \le 104) \approx 0{,}993$ und $P(X \le 105) \approx 0{,}9952$, somit $k_2 - 1 = 105 \Leftrightarrow k_2 = 106$.
Entscheidungsregel: Sind unter den 500 geworfenen Augenzahlen höchstens 62 oder mindestens 106 „Sechser", so wird die Nullhypothese verworfen, und der Würfel wird als „gezinkt" angesehen. Ansonsten gibt es keinen signifikanten Hinweis darauf, dass der Würfel gezinkt ist.
Irrtumswahrscheinlichkeit: Es ist $A = \{0,...,62\} \cup \{106,...,500\}$,
$P(X \in A) = 1 - P(X \le 105) + P(X \le 62) \approx 0{,}010$.

Teil III

Vertieft verständnisorientierte Aufgaben

Aufgabe III.1

Die Funktion u ist auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar.

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{u(x)}$.

Bestimmen Sie damit eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = 2x^2 \cdot e^{4x^3}$.

Lösungshinweise

$f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$. Setze $u(x) = 4x^3$, dann ist $g(x) = \frac{1}{6} \cdot e^{u(x)} \cdot u'(x)$. Also ist $G(x) = \frac{1}{6} \cdot e^{4x^3}$.

Aufgabe III.2

Für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \sin(a \cdot x)$.

a) Bilden Sie die erste, dritte und fünfte Ableitung der Funktion f_a.

b) Bestimmen Sie die 51. Ableitung der Funktion f_a.

Lösungshinweise

a) $f_a'(x) = a \cdot \cos(a \cdot x)$; $f_a'''(x) = -a^3 \cdot \cos(a \cdot x)$; $f_a^{(5)}(x) = a^5 \cdot \cos(a \cdot x)$

b) Für $k = 1; 5; 9; 13...$ ist $f^{(k)}(x) = a^k \cdot \cos(a \cdot x)$ und für $k = 3; 7; 11; 15...$ ist $f^{(k)}(x) = -a^k \cdot \cos(a \cdot x)$. Also ist $f_a^{(51)}(x) = -a^{51} \cdot \cos(a \cdot x)$.

Aufgabe III.3

Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar.

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = (x - x_0)^2 \cdot g(x)$.

Zeigen Sie, dass der Graph von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ die x-Achse als Tangente besitzt.

Lösungshinweise

$f(x_0) = 0$, $f'(x) = 2(x - x_0) \cdot g(x) + (x - x_0)^2 \cdot g'(x)$, es ist $f'(x_0) = 0$.
Damit ist die x-Achse Tangente im Punkt $P(x_0 \mid 0)$.

Aufgabe III.4

Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist zweimal differenzierbar. Es gilt $f'(5) = 0$ und $f''(5) = 2$.

Zeigen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = e^{-f(x)}$ an der Stelle $x = 5$ ein lokales Maximum besitzt.

Lösungshinweise

$g'(x) = -e^{-f(x)} \cdot f'(x)$ und $g''(x) = e^{-f(x)} \cdot f'(x) \cdot f'(x) - e^{-f(x)} \cdot f''(x)$.
Damit gilt $g'(5) = -e^{-f(5)} \cdot 0 = 0$ und $g''(5) = e^{-f(5)} \cdot 0 \cdot 0 - e^{-f(5)} \cdot 2 = -2 \cdot e^{-f(5)} < 0$.
Folglich hat g an der Stelle $x = 5$ ein lokales Maximum.

Aufgabe III.5

Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Es gilt $g(4) = 2$, $g'(4) = 0{,}5$ und $g''(x) < 0$ im Intervall $[0;\, 6]$. Untersuchen Sie, ob g im Intervall $[0;\, 6]$ eine Nullstelle besitzt.

Lösungshinweise

Aus $g''(x) < 0$ folgt, dass g' im Intervall $[0;\, 6]$ streng monoton fallend ist. Somit ist $g'(x) > 0{,}5$ im Intervall $[0;\, 4)$. Der Graph von g verläuft in diesem Bereich also überall steiler als die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}5x$. Diese hat mit dem Graphen von g den Punkt $P(4\,|\,2)$ gemeinsam und geht durch den Ursprung. Somit besitzt g im Intervall $[0;\, 4)$ eine Nullstelle.

Aufgabe III.6

Gegeben ist die auf $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion f durch $f(x) = b - \frac{a^2}{x^2}$ mit $a,b \in \mathbb{R}^+$.

Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen a und b bestehen muss, damit der Graph von f den Graphen der Funktion g mit $g(x) = x^2$ berührt.

Lösungshinweise

Es ist $f'(x) = \frac{2a^2}{x^3}$ und $g'(x) = 2x$. Der Ansatz $\frac{2a^2}{x^3} = 2x$ führt wegen $x \in \mathbb{R}^+$ auf $x = \sqrt{a}$.
$f(\sqrt{a}) = g(\sqrt{a})$ liefert die Bedingung $b - a = a$. Damit ist $b = 2a$.

Aufgabe III.7

Gegeben sind die auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = e^{ax}$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Die zugehörigen Graphen werden mit K_a bezeichnet.
Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen a_1 und a_2 bestehen muss, damit sich K_{a_1} und K_{a_2} senkrecht schneiden.

Lösungshinweise

Schnitt von K_{a_1} und K_{a_2} führt auf die Gleichung $(a_1 - a_2) \cdot x = 0$, die für $a_1 \neq a_2$ die einzige Lösung $x_1 = 0$ hat. Es ist $f_a'(x) = a \cdot e^{ax}$. Damit sich K_{a_1} und K_{a_2} senkrecht schneiden, muss gelten $f_{a_1}'(0) = -\frac{1}{f_{a_2}'(0)}$, also $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.

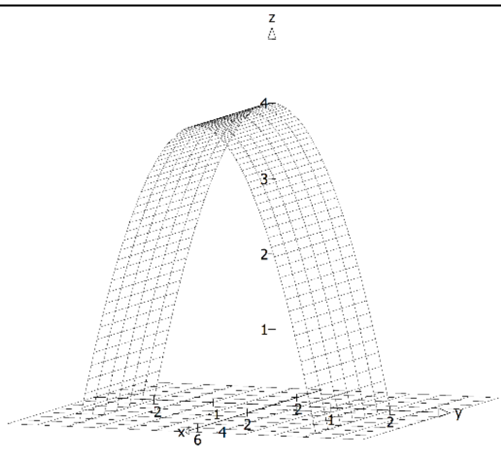
Aufgabe III.8

Gegeben sind die Punkte $P_a\left(0\,|\,a\,|\,4 - a^2\right)$ und $Q_a\left(6\,|\,a\,|\,4 - a^2\right)$ für $a \in [-2;\, 2]$.

Die Strecken P_aQ_a bilden mit einem Teil der x_1x_2-Ebene den Mantel eines Körpers.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

<u>Lösungshinweise</u>

$$V = 6 \cdot \int_{-2}^{2} \left(4 - a^2\right) da = 6 \cdot \left[4a - \frac{1}{3}a^3 \right]_{-2}^{2} = 64$$



Aufgabe III.9

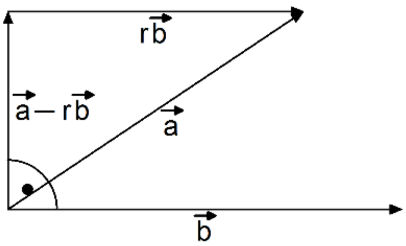
Gegeben sind zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie eine reelle Zahl r mit $0 < r < 1$, für die gilt: $(\vec{a} - r \cdot \vec{b}) \perp \vec{b}$.

a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $r \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} - r \cdot \vec{b}$ in einer beschrifteten Skizze dar.

b) Bestimmen Sie r für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

<u>Lösungshinweise</u>

a)



b) $$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(3-4r) - 4(4+4r) - 2(-6+2r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{9}$$

Aufgabe III.10

Gegeben sind die Ebenen $E: ax_1 + bx_2 + x_3 = d$ und $F: ax_1 + bx_2 + x_3 = d + 2$

a) Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Ebenen kleiner oder gleich 2 ist.

b) Untersuchen Sie, welche besondere Lage die Ebene E hat, wenn ihr Abstand zu F genau 2 ist.

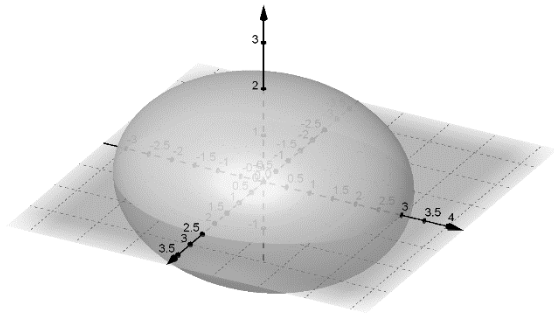
Lösungshinweise

a) $P(0\,|\,0\,|\,d) \in E$, $d(E,F) = d(P,F) = \dfrac{|a\cdot 0 + b\cdot 0 + d - d - 2|}{\sqrt{a^2+b^2+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$

Es ist $\sqrt{a^2+b^2+1} \geq 1$ und somit $d(E,F) \leq 2$.

b) Aus der Bedingung $\sqrt{a^2+b^2+1} = 1$ folgt $a = b = 0$. Die Ebene $x_3 = d$ ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

Aufgabe III.11



Alle Punkte $P(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$, für die $144x_1^2 + 100x_2^2 + 225x_3^2 = 900$ gilt, bilden ein sogenanntes Ellipsoid (siehe Abbildung).

a) Entscheiden Sie, welche der Koordinatenachsen die x_2-Achse ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Die Gerade g enthält $Q(2\,|\,0\,|\,0)$ und verläuft parallel zur x_3-Achse. Sie schneidet das Ellipsoid in zwei Punkten. Berechnen Sie den Abstand dieser beiden Punkte.

Lösungshinweise

a) Die Gleichung $144x_1^2 + 100x_2^2 + 225x_3^2 = 900$ hat für $x_1 = x_3 = 0$ die Lösungen $x_2 = \pm 3$. Also liegt der Punkt $S_1(0\,|\,3\,|\,0)$ auf dem Ellipsoid. Daher kann nur die nach rechts zeigende Achse die x_2-Achse sein.

b) $R_t(2\,|\,0\,|\,t) \in g$, Punktprobe mit Ellipsoid führt zur Gleichung $144 \cdot 2^2 + 100 \cdot 0^2 + 225t^2 = 900$ mit den Lösungen $t_1 = \frac{6}{5}$ und $t_2 = -\frac{6}{5}$. Somit schneidet g das Ellipsoid in den beiden Punkten $R_{\frac{6}{5}}(2\,|\,0\,|\,\frac{6}{5})$ und $R_{-\frac{6}{5}}(2\,|\,0\,|\,-\frac{6}{5})$

Der Abstand der Schnittpunkte beträgt $\frac{6}{5} - \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{12}{5}$.

Aufgabe III.12

Eine Binomialverteilung hat die Parameter $n_1 = 100$ und $p_1 = 0{,}8$.

a) Ermitteln Sie die Parameter einer anderen Binomialverteilung, die den gleichen Erwartungswert und die doppelte Standardabweichung hat.

b) Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Histogramme dieser beiden Binomialverteilungen.

Lösungshinweise

a) Es muss gelten: (I) $n_2 \cdot p_2 = 100 \cdot 0{,}8 = 80$ und (II) $\sqrt{n_2 \cdot p_2 \cdot (1-p_2)} = 2\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 8$

(I) eingesetzt in (II) führt auf $\sqrt{80 \cdot (1-p_2)} = 8$ mit der Lösung $p_2 = 0{,}2$, damit $n_2 = 400$.

b) Die höchsten Säulen befinden sich jeweils bei $k = 80$. Das Histogramm der zweiten Verteilung ist breiter und flacher als das Histogramm der ersten Verteilung.

Aufgabe III.13

Die sechs Seiten eines Würfels tragen die Zahlen 0 - 0 - 0 - 2 - 2 - 5.

a) Der Würfel wird zehnmal geworfen. Betrachtet wird das Ereignis
A: „Es wird insgesamt fünfmal die 0, dreimal die 2 und zweimal die 5 geworfen."
Begründen Sie, dass $P(A) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$ gilt.

b) Der Würfel wird zwanzigmal geworfen. Betrachtet wird das Ereignis
B: „Es wird insgesamt zwölfmal die 0, fünfmal die 2 und dreimal die 5 geworfen."
Geben Sie einen Term für $P(B)$ an.

<u>Lösungshinweise</u>

a) Bei zehn Würfen gibt es $\binom{10}{5}$ Möglichkeiten für die Positionen, an denen die fünf Nullen fallen können, sowie dann noch $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten für die Positionen, an denen die drei Zweien fallen können; die verbleibenden Positionen für die beiden Fünfen liegen dann fest. Insgesamt gibt es also $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3}$ mögliche Anordnungen. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis aus diesem Ereignis beträgt $\left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Somit ergibt sich

$$P(A) = \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 .$$

b) $P(B) = \binom{20}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$