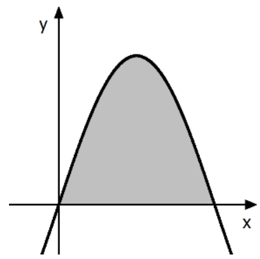
Aufgabe 1

Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$.
Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



(2,5 VP)

Aufgabe 2

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ mit $t \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le 10$, beschrieben werden.

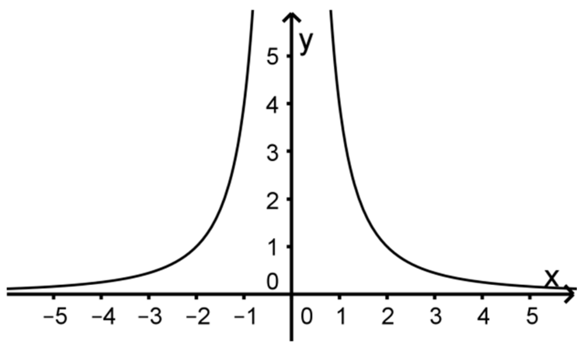
a) Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung.

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde –30 beträgt.

(2,5 VP)

Aufgabe 3

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierten Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$.
G_f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.



a) Die Gerade, die parallel zur x-Achse durch den Punkt $P(0|p)$ verläuft, schneidet G_f in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von p.

b) Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an G_f in einem Punkt $Q(u\,|\,f(u))$ mit $u > 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein.
Berechnen Sie die Koordinaten von Q.

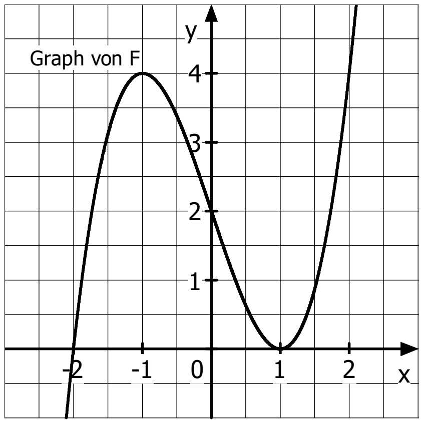
(2,5 VP)

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) f' besitzt im Bereich $-1 \le x \le 1$ eine Nullstelle.

(2) $f\left(F(-2)\right) > 0$



(2,5 VP)

Aufgabe 5

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$.

a) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an.
Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.

b) Die Ebene E enthält die Geraden g und h.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(2,5 VP)

Aufgabe 6

Das Dreieck ABC mit den Punkten $A(3|3|3)$, $B(6|7|3)$ und $C(2|10|3)$ ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3$.

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$ besitzt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts D so, dass das Volumen der Pyramide ABCD gleich 25 ist.

(2,5 VP)

Aufgabe 7

a) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar.

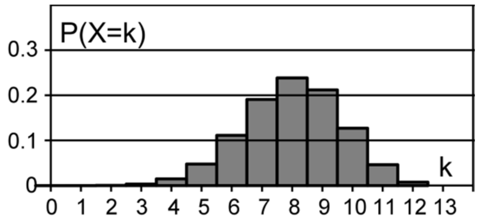


Abb. 1

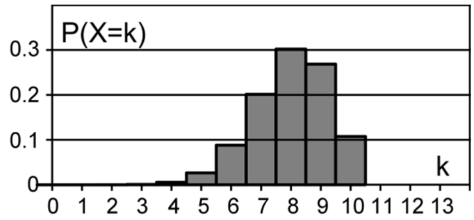


Abb. 2

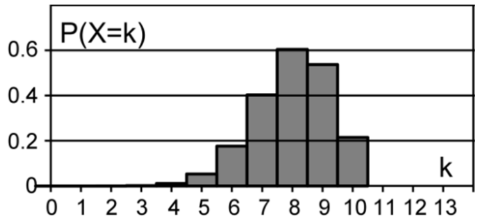


Abb. 3

Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe.

b) Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern n und p.
Es gilt:

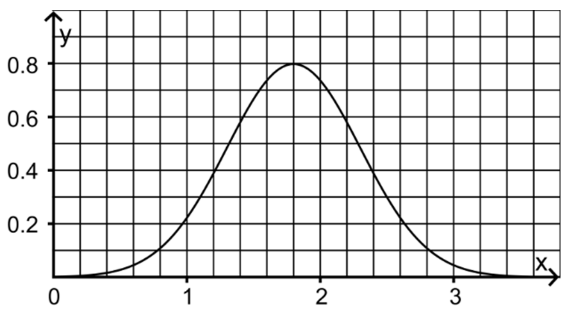
- Der Erwartungswert von Y ist 8.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist symmetrisch.

Ermitteln Sie den Wert von n.

(2,5 VP)

Aufgabe 8

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X.



a) Geben Sie den Erwartungswert von X an.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert 2,4 annimmt.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert aus dem Intervall $[1; 1{,}4]$ annimmt.

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.1

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

a) Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an.
Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

I $\quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100, \qquad a \in \mathbb{R}$

II $\quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100, \qquad b \in \mathbb{R}$

(5 VP)

b) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.

(3,5 VP)

Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

c) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

(4,5 VP)

d) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(4,5 VP)

Aufgabe A 1.2

Zeigen Sie: Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion f die x-Achse in einem Punkt P berührt, dann gilt dies auch für den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{f(x)} - 1$.

(2,5 VP)

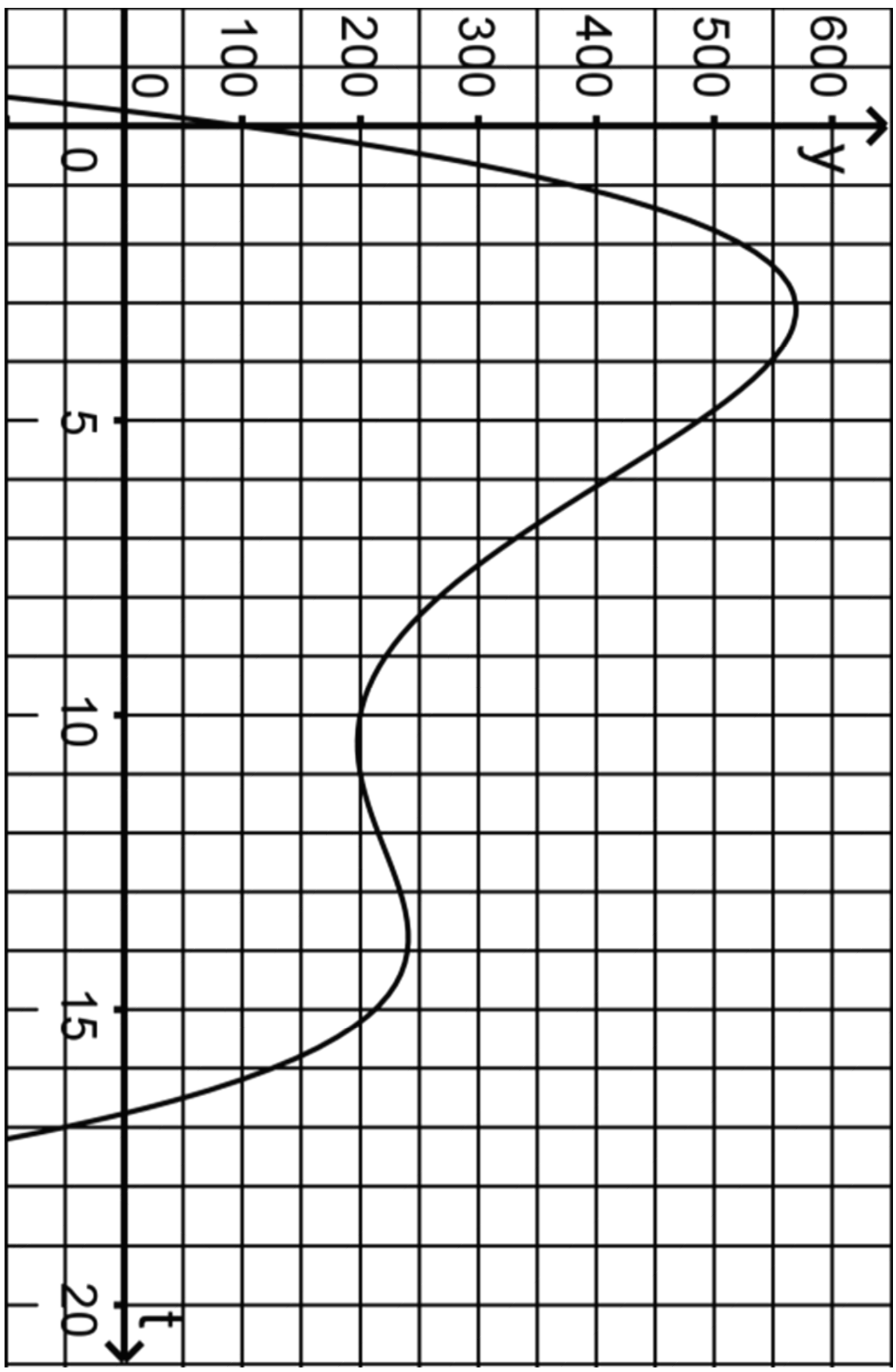
Zu- und Vorname: ____________________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Prüfungsfach: ____________________________

Chiffre der Schule	Chiffre des Schülers

Abbildung zu Aufgabe A 1.1



Aufgabe B 1.1

a) Gegeben sind die Punkte $A(6\,|\,1\,|\,0)$, $B(4\,|\,5\,|\,-4)$ und $C(-2\,|\,8\,|\,2)$.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B einen rechten Winkel besitzt.
Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Es gibt einen Punkt D, für den das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten von D.

(4 VP)

b) Gegeben ist die Ebenenschar $E_k:\ kx_1 + kx_2 + x_3 = 14 \quad (k \in \mathbb{R})$.
Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E_0 im Koordinatensystem.
Bestimmen Sie die Ebenen der Schar, von denen der Punkt $R(1\,|\,1\,|\,4)$ den Abstand 2 hat.

(3,5 VP)

Aufgabe B 1.2

Beweisen Sie:
Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, so ist es ein Rechteck.

(2,5 VP)

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

1-Personen-Haushalte	40,5 %
2-Personen-Haushalte	34,5 %
3-Personen-Haushalte	12,5 %
4-Personen-Haushalte	9,2 %
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3 %

a) Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden. Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt.“
B: „Unter den ersten zehn ausgewählten Haushalten war kein 4-Personen-Haushalt und unter den restlichen neunzig Haushalten waren höchstens fünf 4-Personen-Haushalte.“

(2,5 VP)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in drei im Jahr 2013 zufällig ausgewählten Haushalten insgesamt genau fünf Personen lebten. (1,5 VP)

c) Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind. (2 VP)

d) Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei sollte möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einem zu hohen Anteil der 1-Personen-Haushalte ausgegangen wird. Formulieren Sie eine Nullhypothese, die dieser Zielsetzung entspricht, und begründen Sie Ihre Wahl.

(1,5 VP)

e) Man bezweifelt, dass der Anteil der 2-Personen-Haushalte heute immer noch 34,5 % beträgt. Die Nullhypothese „Dieser Anteil beträgt mindestens 34,5 %.“ soll mit einem Stichprobenumfang $n = 500$ auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Dabei ergibt sich der Ablehnungsbereich $A = \{0, \ldots, 154\}$. Formulieren Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art 25 % beträgt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der wahre Anteil der 2-Personen-Haushalte nicht 30 % betragen kann.

[Textfassung am 24.02.2021 leicht geändert.] (2,5 VP)