1 Analysis (3 BE und 2 BE)

Gegeben ist eine im Intervall [-4;4] definierte Polynomfunktion f vom Grad 3.
Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung und schneidet die x-Achse im Punkt N(4|0).
Der Wertebereich von f ist $W_f = [-2;2]$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f, wenn bekannt ist, dass $f'(0) < 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung einer trigonometrischen Funktion g, sodass f und g im Intervall [-4;4] dieselben Nullstellen haben.

2 Analysis (1 BE und 2 BE und 2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -2x + e^{4x}$.

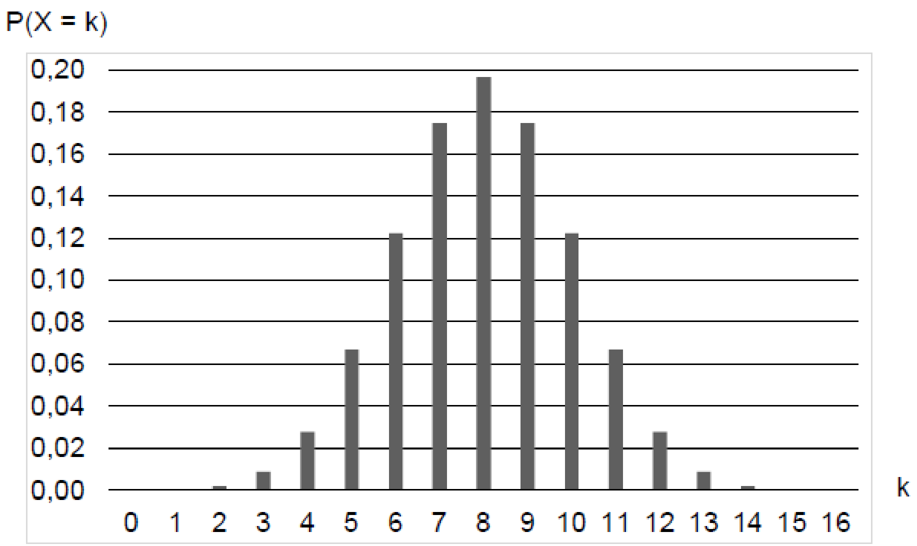
a) Geben Sie eine Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.

b) Bestimmen Sie den x-Wert, an dem der Graph von f die Steigung 2 hat.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von f keinen Wendepunkt hat.

3 Stochastik (1 BE und 2 BE und 2 BE)

Eine Urne enthält 15 weiße und 15 rote Kugeln. Aus dieser 16-mal mit Zurücklegen gezogen.
Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an.
Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.



a) Geben Sie den Erwartungswert von X an.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Werten aus de Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(6 \leq X \leq 7)$.

c) Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln an.
Erläutern Sie, warum die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ebenfalls durch die Abbildung oben dargestellt werden kann.

4 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Gegeben sind die Punkte A(1|3|3), B(9|-1|-5), C(3|5|-5) und M(5|1|-1).

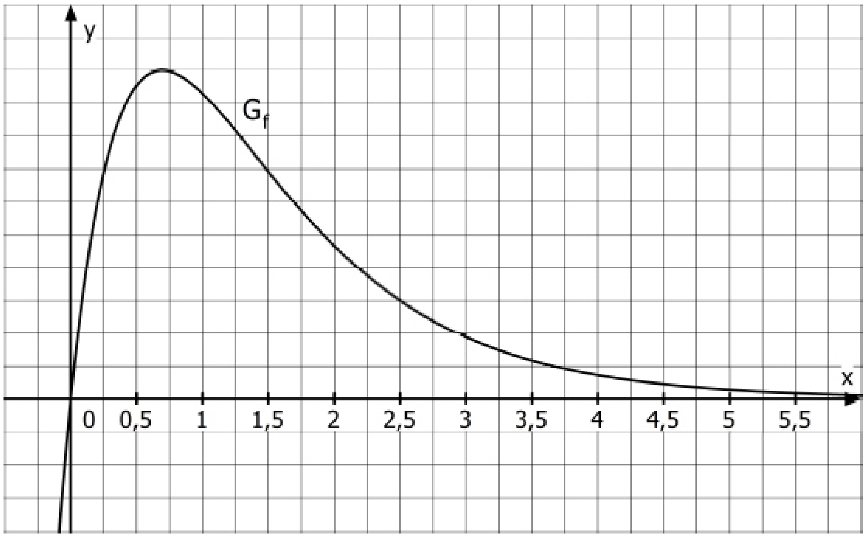
a) Weisen Sie folgende Sachverhalte nach:

(1) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AB.
(2) Die Vektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{MC}$ schließen einen rechten Winkel ein.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der doppelt so weit vom Punkt M entfernt ist wie vom Punkt C.

5/1 Analysis (2 BE und 3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \to e^{-x} - e^{-2x}$. G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = 0$ und hat einen Hochpunkt an der Stelle x_H.



a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass x_1 die einzige Nullstelle von f ist.

b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Abbildung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f''(0{,}5) > 0$

(2) $\int_0^2 f(x)dx < 2 \cdot f(x_H)$

5/2 Analysis (1 BE und 4 BE)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\left(x^2-4\right)\cdot\left(x-1\right)$ mit $x\in\mathbb{R}$.
Ihr Graph ist K_f.

a) Geben Sie die Nullstellen von f an.

b) Betrachtet wird die Tangente an K_f im Schnittpunkt von K_f mit der y-Achse.
Zeigen Sie, dass diese Tangente mit K_f einen gemeinsamen Punkt auf der x-Achse hat.

5/3 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Gegeben sind die beiden 2x2-Matrizen A und B sowie der Vektor $\vec{v}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass B eine inverse Matrix zu A ist.

b) Geben Sie eine mögliche Fragestellung an, die durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems beantwortet werden kann.

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 1 \\ -3v_1 + v_2 &= 2 \end{aligned}$$

5/4 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Für eine reelle Zahl a ist die Gerade g durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

Außerdem wird die Ebene E beschrieben durch E: $x_1 + x_2 = 3$.

a) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass sich g und E orthogonal schneiden.

b) Für a = 1,5 schneidet g die x_1-Achse im Punkt P und die Ebene E im Punkt S(1|2|3). Zudem ist der Punkt Q(1|2|0) bekannt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQS.

6 Stochastik (Problemlöseaufgabe) (10 BE)

Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentieren und reflektieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Drei zufällig mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählte, verschiedene Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks (d.h. alle Seiten sind gleich lang, alle Innenwinkel betragen 108°) werden zu einem Dreieck verbunden.

Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Mittelpunkt des Fünfecks innerhalb des Dreiecks liegt.

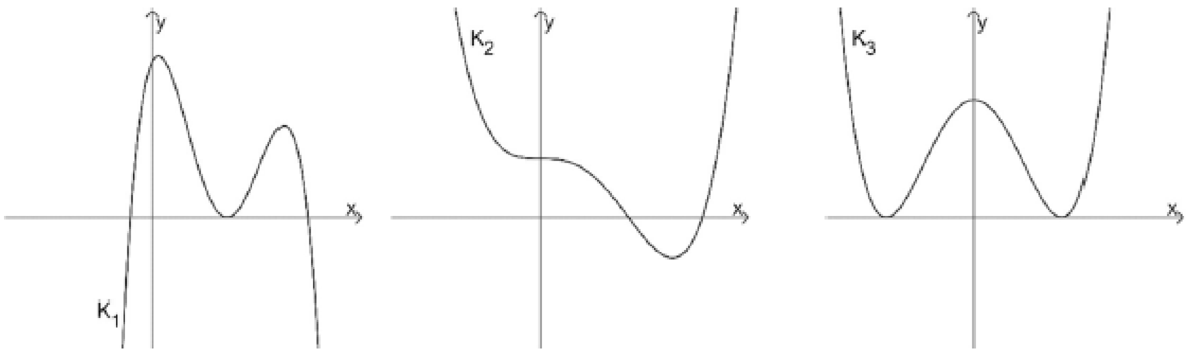
1 Analysis

1.1 (a) 6 BE b) 5 BE c) 1 BE d) 6 BE e) 4 BE))

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$.

Ihr Graph ist K.

a) Einer der drei Graphen entspricht K.
Beurteilen Sie für jeden Graph, ob es sich um K handeln kann.



b) Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte, in denen K eine waagrechte Tangente hat.
Geben Sie für jeden dieser Punkte an, ob es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt.

c) Weisen Sie nach, dass f bei x = 2 eine Nullstelle hat.

Neben dem Wendepunkt W(2|0) besitzt K einen weiteren Wendepunkt S(0|f(0)).
Der Punkt $P(1|\frac{4}{3})$ liegt oberhalb des Graphen von f.

d) Weisen Sie nach, dass sich die beiden Wendetangenten im Punkt P schneiden.

e) Das Dreieck PSW wird von K in zwei Teile geteilt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilfläche oberhalb von K.

1.2 (a) 2 BE b) 6 BE c) 2 BE d) 3 BE e) 5 BE))

Die CO_2-Konzentration in der Atmosphäre wird seit 1958 durchgehend gemessen. Dabei sind die jährlichen Werte der Jahre 2012 bis 2022 in folgender Tabelle eingetragen. Die CO_2-Konzentration wird in Millionstel (ppm, „parts per million") angegeben.

Jahr	CO_2 (ppm)
2012	394,06
2013	396,74
2014	398,81
2015	401,01
2016	404,41
2017	406,76
2018	408,72
2019	411,65
2020	414,21
2021	416,41
2022	418,53

Quelle:
Dr. Pieter Tans, NOAA/GML and Dr. Ralph Keeling, Scripps Institution of Oceanography
URL: https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/data.html, heruntergeladen am 15.05.2023

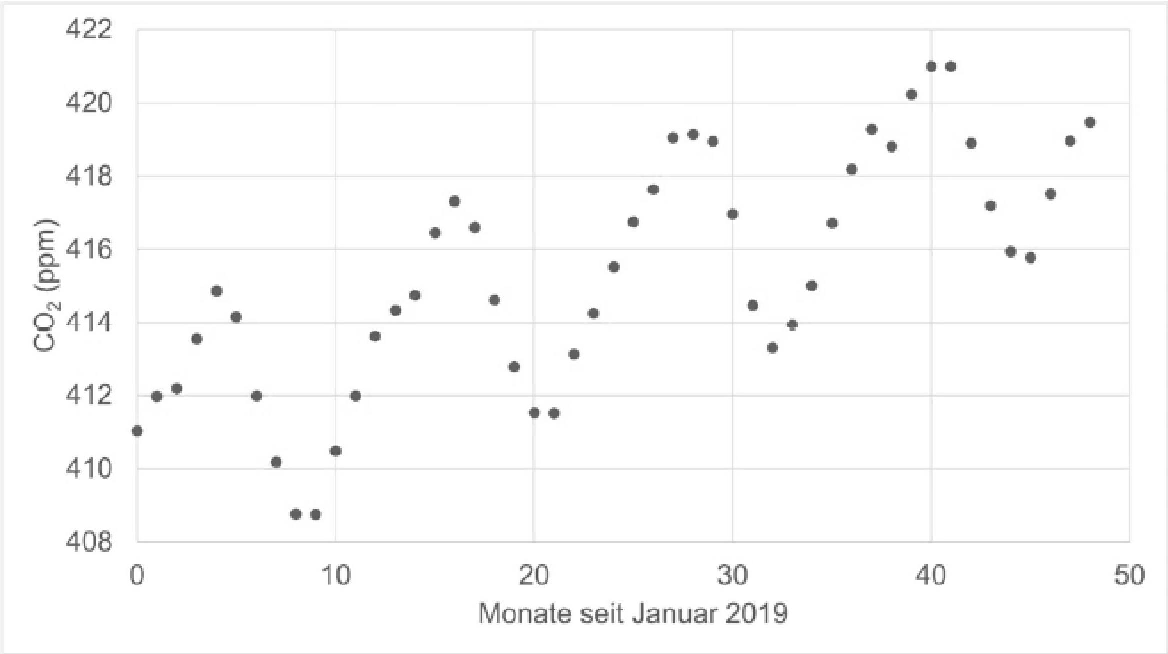
a) Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate der CO_2-Konzentration im Zeitraum 2012 bis 2022.

b) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell für den gegebenen Verlauf der CO_2-Konzentration. Geben Sie dazu eine geeignete Funktionsgleichung an. Begründen Sie Ihre Auswahl.

c) Berechnen Sie die CO_2-Konzentration, die laut Ihrem Modell im Jahr 2100 zu erwarten ist.

d) Deuten Sie im Sachzusammenhang, warum ein mathematisches Modell, das auf Messungen innerhalb der Jahre 2012 bis 2022 beruht, nicht grundsätzlich für eine Vorhersage der CO_2-Konzentration im Jahr 2100 verwendet werden kann.

Der Verlauf der monatlichen Mittelwerte der CO_2-Konzentration ist für die Jahre 2019 bis 2022 in der Abbildung dargestellt. Darin sind neben einem langfristigen Trend auch die Schwankungen innerhalb eines Jahres zu erkennen.



e) Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen den abgebildeten Zusammenhang am besten wiedergibt.
Begründen Sie Ihre Auswahl.

$f(x) = 0{,}19x + 2{,}95 \cdot \sin(0{,}53 \cdot (x - 0{,}17)) + 410{,}7$

$g(x) = 3{,}14 \cdot \sin(0{,}53 \cdot (x + 0{,}14)) + 415{,}3$

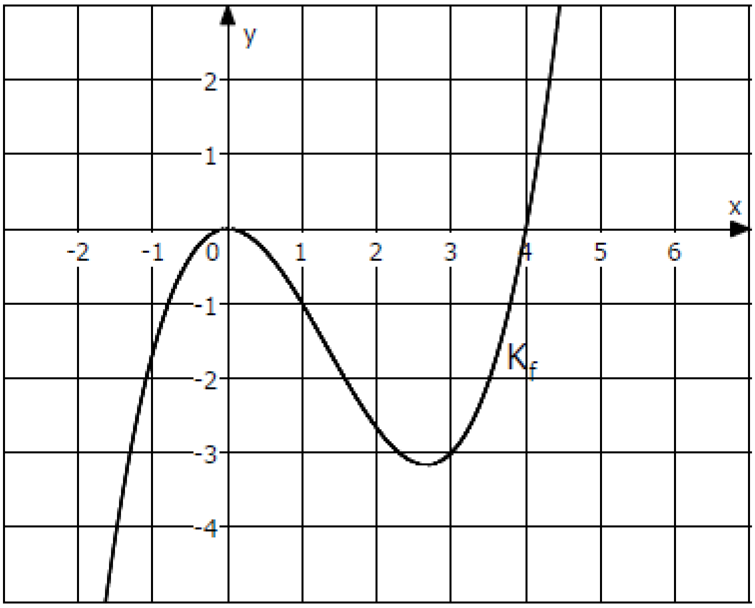
$h(x) = 0{,}21x \cdot 2{,}84 \cdot \sin(0{,}51 \cdot (x - 0{,}24)) + 411{,}2$

$j(x) = 0{,}18x + 3{,}09 \cdot \sin(1{,}29 \cdot (x - 0{,}09)) + 409{,}2$

1 Analysis

1.1 (a) 2 BE b) 4 BE c) 5 BE d) 3 BE e) 3 BE f) 4 BE g) 2 BE))

Für eine reelle Zahl a ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f gegeben durch $f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x-4)$. Der Graph von f ist K_f.



a) Ermitteln Sie den Wert von a.

Im Folgenden gilt $a = \frac{1}{3}$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes von K_f.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Wendetangente w an K_f die x-Achse schneidet.

d) Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s geht aus K_f durch Verschiebung um $\frac{4}{3}$ in negative x-Richtung sowie eine Verschiebung in y-Richtung hervor.

Es gilt $s(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{16}{9}x$.
Zeigen Sie unter Verwendung der Funktionsgleichung von s'', dass der Graph von f an der Stelle 1 rechtsgekrümmt ist.

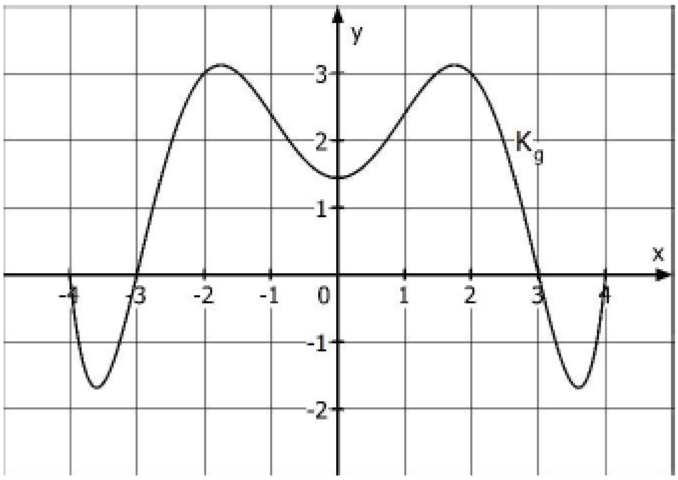
e) Der Ursprung, der Punkt P(u|0) und der Punkt Q(u|f(u)) bilden für $0{,}5 \le u \le 3{,}5$ im 4.Quadranten ein Dreieck mit dem Flächeninhalt A(u). Erläutern Sie die Bedeutung der Stelle u, die mit folgender Rechnung ermittelt wird:
$A'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 3$
Dabei gilt: $A''(3) < 0$ und A(0,5)<A(3) und A(3,5)<A(3)

f) Eine quadratische Funktion p hat dieselben Nullstellen wie f. Die Graphen von p und f schließen im 4.Quadranten zwei gleich große Flächenstücke ein. Ermitteln Sie eine Gleichung von p.

g) Begründen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = e^{f(x)}$ die gleichen Extremstellen wie die Funktion f hat.

1.2 (6 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen K_g einer Funktion g im Definitionsbereich $-4 \le x \le 4$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.



(1) Die zugehörige Ableitungsfunktion g' hat genau 5 Nullstellen.

(2) Es gilt: $\int_0^4 g(x)dx > 0$

(3) Die Integralfunktion I_0 mit $I_0(x) = \int_0^x g(t)dt$ ist für $0 \le x \le 4$ monoton wachsend.

1.3 (a) 3 BE b) 1 BE c) 4 BE d) 3 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion k mit $k(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-t}$ $(t \geq 0)$ beschreibt die Konzentration eines Medikaments im Blut.
Hierbei ist t die Zeit seit der Einnahme (t = 0) in Stunden.
k(t) wird in Milligramm pro Liter $\left(\frac{mg}{l}\right)$ angegeben.

a) Zeichnen Sie den Graphen von k für $0 \leq t \leq 10$.

b) Geben Sie anhand der Zeichnung näherungsweise den Zeitpunkt an, zu welchem die Konzentration am stärksten abnimmt.

c) Es gilt $k'(7) < 0$ und $k''(7) > 0$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser beiden Aussagen hinsichtlich des Verlaufs des Graphen von k.
Interpretieren Sie diese beiden Aussagen im Sachzusammenhang.

d) Ermitteln Sie näherungsweise eine Lösung der Gleichung $k(t) - k(t+1) = 1$ und interpretieren Sie diese Lösung im Sachzusammenhang.

2 Stochastik (a) 2 BE b) 4 BE c) 6 BE d) 5 BE e) 4 BE f) 4 BE)

Bei einem Marathonlauf kommen erfahrungsgemäß 77% der Teilnehmer im Ziel an. Untersucht wird eine Gruppe von 150 zufällig ausgewählten Teilnehmern. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Teilnehmer dieser Gruppe, die im Ziel ankommen.

a) Es gilt: $P(X > 115) \approx 50{,}7\%$.
Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.

b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Aus dieser Gruppe kommen genau 110 Teilnehmer im Ziel an.
B: Aus dieser Gruppe kommen weniger als 119 Teilnehmer im Ziel an.

c) Jeder der 45000 Teilnehmer, der im Ziel ankommt, erhält ein Finisher-Shirt.
Y beschreibt die Anzahl an ausgegebenen Finisher-Shirts.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Y um weniger als eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

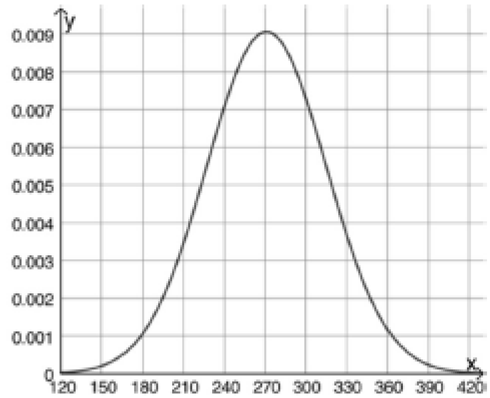
Von den Teilnehmern, die nicht im Ziel angekommen sind, haben
- 82% wegen „mangelnder Vorbereitung“
- 72% entweder wegen „mangelnder Vorbereitung“ oder wegen „Schmerzen während des Laufs“
- 13% weder wegen „mangelnder Vorbereitung“ noch wegen „Schmerzen während des Laufs“

den Lauf abgebrochen.

d) Zeigen Sie, dass 20% derjenigen, die nicht im Ziel angekommen sind, den Lauf wegen „Schmerzen während des Laufs“ abgebrochen haben.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse „mangelnde Vorbereitung“ und „Schmerzen während des Laufs“ stochastisch unabhängig sind.

e) 34% der Teilnehmer, die den Lauf beenden, sind Frauen. Betrachtet wird eine Gruppe von 1000 Teilnehmern, die den Lauf beendet haben. Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl k, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Gruppe weniger als k Frauen befinden, kleiner als 20% ist.

f) Die Laufzeit einer Frau, die im Ziel ankommt, wird durch eine normal verteilte Zufallsgröße mit einer Standardabweichung von 44 min beschrieben. Die Abbildung zeigt den Graphen einer zugehörigen Dichtefunktion. Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Laufzeit einer Frau zwischen vier und fünf Stunden beträgt. Beurteilen Sie die folgende Aussage: „Der Abbildung entnimmt man, dass die Wahrscheinlichkeit einer Zeit von genau vier Stunden etwa 0,7% beträgt.“



2 Stochastik (a) 5 BE b) 3 BE c) 3 BE d) 2 BE e) 3 BE f) 2 BE g) 7 BE)

Ein Unternehmen lässt ein neues Pflegeprodukt auf Verträglichkeit prüfen. Tests ergaben, dass 91% der Anwender das Produkt vertragen. Bei den anderen Anwendern trat eine Unverträglichkeit auf.

a) Es werden nacheinander 20 zufällig ausgewählte Testpersonen befragt. Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

E_1: Nur die dritte Testperson verträgt das Produkt nicht.
E_2: Genau 18 Testpersonen vertragen das Produkt.
E_3: Mindestens 70% der Testpersonen vertragen das Produkt.

b) 200 Personen nutzen das Pflegeprodukt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei die Anzahl der Personen, die das Produkt nicht vertragen, zwischen 14 und 22 liegt.

Bei den Unverträglichkeiten der Testpersonen kann es sich um eine Allergie (A) oder um eine Irritation (I) handeln. Beide Unverträglichkeiten können einzeln oder auch gemeinsam auftreten. Bei 5,5% aller Testpersonen tritt eine Allergie auf. Von diesen haben 90% keine Irritation.

	A	$\overline{A}$	Σ
I			
$\overline{I}$		0,91	
Σ			

c) Übertragen Sie die Vierfeldertafel auf Ihr Blatt und vervollständigen Sie diese. (*zur Kontrolle:* $P(A \cap I) = 0{,}0055$)

d) Zeigen Sie, dass das Auftreten der beiden Unverträglichkeiten stochastisch abhängig voneinander ist.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass entweder eine Allergie oder eine Irritation auftritt.

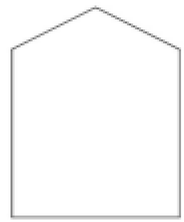
f) Nachdem eine Testperson das Pflegeprodukt anwendet, tritt bei ihr eine Irritation auf. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie auch allergisch reagiert.

Die Kosten für die Herstellung des Pflegeprodukts betragen 0,50 € pro Stück, der Kaufpreis 9,50 € pro Stück. Das Unternehmen erstattet den gesamten Kaufpreis, wenn der Kunde dies begründet beantragt. Dafür muss angegeben werden, ob dies entweder aufgrund einer Unverträglichkeit oder aus sonstigen Gründen geschieht. Alle Kunden mit auftretender Unverträglichkeit beantragen eine Rückerstattung.

g) Das Unternehmen möchte einen durchschnittlichen Gewinn von mindestens 6,50 € pro Stück erwirtschaften. Berechnen Sie, wie groß der Anteil aller Kunden höchstens sein darf, welche die Rückerstattung aus sonstigen Gründen beantragen.

3 Lineare Algebra (a) 4 BE b) 4 BE c) 3 BE d) 5 BE e) 2 BE f) 4 BE g) 3 BE)

In einem Garten steht ein vollständig verglastes Gewächshaus. Die rechteckige Grundfläche ABCD in der x_1x_2-Ebene ist 5 Meter (m) lang und 2 m breit. In einer Höhe von 2 m beginnt die Dachschräge, das gesamte Gewächshaus ist 2,5 m hoch. In der Skizze rechts ist die symmetrische Frontansicht des Gewächshauses dargestellt.



a) Zeichnen Sie das Gewächshaus in ein dreidimensionales Koordinatensystem, wenn die Eckpunkte A(5|0|0), B(5|2|0), C(0|2|0), F(5|2|2), G(0|2|2), I(5|1|2,5) und J(0|1|2,5) bekannt sind.

b) Berechnen Sie das Gewicht des für das Gewächshaus benötigten Glases, wenn ein Quadratmeter Glas 10 kg wiegt.

c) Berechnen Sie den Neigungswinkel für eine der schrägen Dachkanten.

An der Seite des Gewächshauses soll ein dreieckiges, ebenes Sonnensegel angebracht werden. Die Eckpunkte des Sonnensegels sollen sich in den Punkten F und G des Gewächshauses und der Spitze S(3|4|1,5) eines Pfostens befinden. Im Punkt (3|3|0) steht der 1,8 m hohe, gerade Stumpf eines alten Kirschbaumes.

d) Untersuchen Sie, ob der Stumpf gekürzt werden muss, damit das Segel wie geplant gespannt werden kann.

e) Zeigen Sie, dass es sich bei dem Segel nicht um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.

f) Bestimmen Sie einen Wert für k, so dass durch die Verschiebung der Pfostenspitze in den Punkt $P_k(3\,|\,k\,|\,1{,}5)$ ein gleichschenkliges Dreieck FGP_k entsteht.

g) Zur Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den Punkten B und G ergibt sich folgender Ansatz:

$$\left|\begin{pmatrix} 5-t \\ 2-4 \\ 0-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-t \\ 2-4 \\ 2-3 \end{pmatrix}\right|$$

Interpretieren Sie diesen Ansatz.

3 Lineare Algebra (a) 4 BE b) 3 BE c) 3 BE d) 5 BE e) 3 BE f) 7 BE)

Gegeben sind die Punkte A(0|3|0) und C(2|-1|4) sowie die Gerade h mit

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}.$$

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und C.

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h in einer gemeinsamen Ebene E liegen.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der in Teilaufgabe a) beschriebenen Ebene E.
(*zur Kontrolle:* $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$)

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Spurpunkte von E.
Stellen Sie die Ebene E mit Hilfe der Spurpunkte in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

Die Punkte A und C sind gegenüberliegende Eckpunkte eines in der Ebene E liegenden Quadrats ABCD mit Mittelpunkt M.
Dieses Quadrats ABCD ist die Grundfläche einer sogenannten geraden Pyramide, d.h. der Verbindungsvektor von M und der Spitze der Pyramide ist orthogonal zur Grundfläche.

d) Zeigen Sie, dass ein weiterer Eckpunkt des Quadrats die Koordinaten (-1|2|4) hat.
Berechnen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten einer möglichen Spitze der Pyramide, sodass diese die Höhe 12 hat.

Eine weitere gerade Pyramide mit der Grundfläche ABCD hat die Spitze R und wird aus der x_3-Richtung beleuchtet. Es entsteht ein Schatten in der Ebene E.
Der Schattenpunkt der Spitze R ist R'(3|3|-6).

f) Begründen Sie, dass der Schattenpunkt R' außerhalb der Grundfläche der Pyramide liegt.
Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze R.