

1 Analysis (3 BE und 2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2 - 3$.

Der Graph von f ist K .

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von K .
- b) Begründen Sie, dass K die x -Achse im Intervall $[-2;0]$ schneidet.

2 Stochastik (3 BE und 2 BE)

Eine große Sportartikelmarke untersucht ihre Beliebtheit in verschiedenen Altersgruppen.

Von den Befragten unter 20 Jahren gaben 40% an, Fans der Marke zu sein.
Unter den Befragten, die mindestens 20 Jahre alt waren, waren 65% Fans der Marke.

Insgesamt waren 30% der Befragten unter 20 Jahre alt.

- a) Stellen Sie die Situation in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm dar.
- b) Geben Sie eine Frage im gegebenen Sachzusammenhang an, die mit Hilfe des Terms

$$\frac{0,7 \cdot 0,65}{0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,65}$$

beantwortet werden kann.

3 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(1|3|3)$, $B(9|-1|-5)$, $C(3|5|-5)$ und $M(5|1|-1)$.

- a) Weisen Sie folgende Sachverhalte nach:
 - (1) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AB .
 - (2) Die Vektoren $\vec{AM}$ und $\vec{MC}$ schließen einen rechten Winkel ein.
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der doppelt so weit vom Punkt M entfernt ist wie vom Punkt C .

4/1 Analysis (3 BE und 2 BE)

Gegeben ist eine im Intervall $[-4;4]$ definierte Polynomfunktion f vom Grad 3.
Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung und schneidet die x -Achse im Punkt $N(4|0)$.

Der Wertebereich von f ist $W_f = [-2;2]$.

- a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f , wenn bekannt ist, dass $f'(0) < 0$ gilt.
- b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung einer trigonometrischen Funktion g , sodass f und g im Intervall $[-4;4]$ dieselben Nullstellen haben.

4/2 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

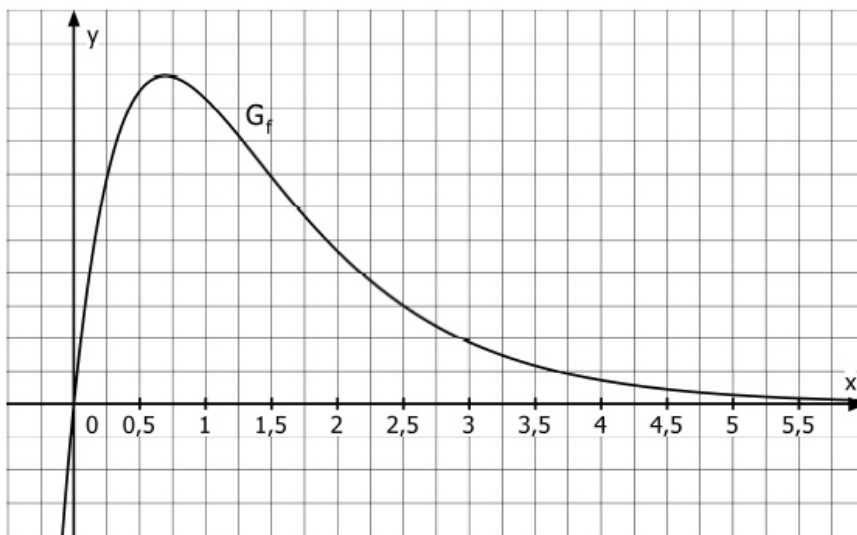
Der Punkt $A(-1|2|4)$ wird an der x_2x_3 -Ebene gespiegelt.

Der gespiegelte Punkt wird mit A' bezeichnet.

- a) Zeichnen Sie A und A' in ein geeignetes Koordinatensystem ein.
- b) P ist ein beliebiger Punkt auf der x_2 -Achse.
Begründen Sie, dass P genauso weit von A wie von A' entfernt ist.

5/1 Analysis (2 BE und 3 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \rightarrow e^{-x} - e^{-2x}$. G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = 0$ und hat einen Hochpunkt an der Stelle x_H .



- a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass x_1 die einzige Nullstelle von f ist.
- b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Abbildung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f''(0,5) > 0$

(2) $\int_0^2 f(x) dx < 2 \cdot f(x_H)$

5/2 Lineare Algebra (2 BE und 3 BE)

Gegeben ist die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

und der Punkt $A(2|0|4)$ auf dieser Geraden.

Der Punkt $Q(-2|-4|6)$ liegt nicht auf der Geraden.

- Weisen Sie nach, dass $|\overline{QA}|$ dem Abstand von Q zur Geraden g entspricht.
- Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes B auf g , der zusammen mit A und Q ein gleichschenkliges Dreieck bildet.

6 Stochastik (Problemlöseaufgabe) (10 BE)

Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentieren und reflektieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Eine Klasse will ein Glücksspiel in Form eines Zufallsexperiments anbieten, bei dem sie im langfristigen Mittel 1 € Gewinn pro Spiel macht.

Entwerfen und beschreiben Sie ein dazu passendes mehrstufiges Zufallsexperiment.

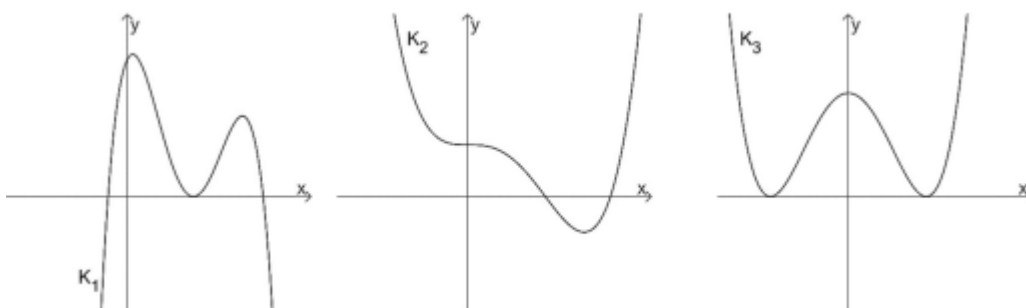
1 Analysis

1.1 (a) 6 BE b) 5 BE c) 1 BE d) 6 BE e) 4 BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}$.

Ihr Graph ist K .

- a) Einer der drei Graphen entspricht K .
Beurteilen Sie für jeden Graph, ob es sich um K handeln kann.



- b) Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte, in denen K eine waagrechte Tangente hat.
Geben Sie für jeden dieser Punkte an, ob es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt.

- c) Weisen Sie nach, dass f bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

Neben dem Wendepunkt $W(2|0)$ besitzt K einen weiteren Wendepunkt $S(0|f(0))$.

Der Punkt $P(1|\frac{4}{3})$ liegt oberhalb des Graphen von f .

- d) Weisen Sie nach, dass sich die beiden Wendetangenten im Punkt P schneiden.

- e) Das Dreieck PSW wird von K in zwei Teile geteilt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Teilfläche oberhalb von K .

1.2 (a) 2 BE b) 6 BE c) 2 BE d) 3 BE)

Die CO_2 -Konzentration in der Atmosphäre wird seit 1958 durchgehend gemessen. Dabei sind die jährlichen Werte der Jahre 2012 bis 2022 in folgender Tabelle eingetragen. Die CO_2 -Konzentration wird in Millionstel (ppm, „parts per million“) angegeben.

Jahr	CO_2 (ppm)
2012	394,06
2013	396,74
2014	398,81
2015	401,01
2016	404,41
2017	406,76
2018	408,72
2019	411,65
2020	414,21
2021	416,41
2022	418,53

Quelle:

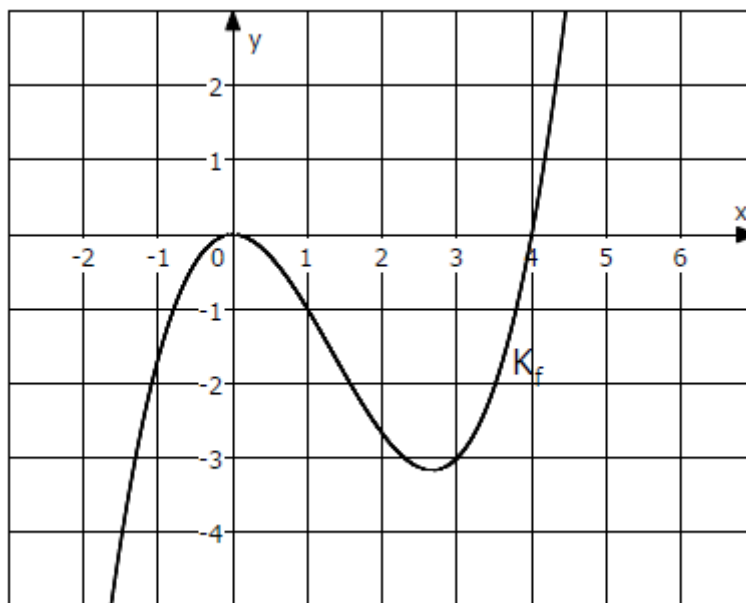
Dr. Pieter Tans, NOAA/GML and Dr. Ralph Keeling, Scripps Institution of Oceanography
URL: <https://gml.noaa.gov/ccgg/trends/data.html>, heruntergeladen am 15.05.2023

- a) Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate der CO_2 -Konzentration im Zeitraum 2012 bis 2022.
- b) Ermitteln Sie ein mathematisches Modell für den gegebenen Verlauf der CO_2 -Konzentration. Geben Sie dazu eine geeignete Funktionsgleichung an. Begründen Sie Ihre Auswahl.
- c) Berechnen Sie die CO_2 -Konzentration, die laut Ihrem Modell im Jahr 2100 zu erwarten ist.
- d) Deuten Sie im Sachzusammenhang, warum ein mathematisches Modell, das auf Messungen innerhalb der Jahre 2012 bis 2022 beruht, nicht grundsätzlich für eine Vorhersage der CO_2 -Konzentration im Jahr 2100 verwendet werden kann.

1 Analysis

1.1 (a) 2 BE b) 4 BE c) 5 BE d) 3 BE e) 3 BE f) 4 BE))

Für eine reelle Zahl a ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f gegeben durch $f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - 4)$. Der Graph von f ist K_f .



a) Ermitteln Sie den Wert von a .

Im Folgenden gilt $a = \frac{1}{3}$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes von K_f .

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Wendetangente w an K_f die x -Achse schneidet.

d) Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion s geht aus K_f durch Verschiebung um $\frac{4}{3}$ in negative x -Richtung sowie eine Verschiebung in y -Richtung hervor.

$$\text{Es gilt } s(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{16}{9}x.$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Funktionsgleichung von s'' , dass der Graph von f an der Stelle 1 rechtsgekrümmt ist.

e) Der Ursprung, der Punkt $P(u|0)$ und der Punkt $Q(u|f(u))$ bilden für $0,5 \leq u \leq 3,5$ im 4. Quadranten ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A(u)$. Erläutern Sie die Bedeutung der Stelle u , die mit folgender Rechnung ermittelt wird:

$$A'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 3$$

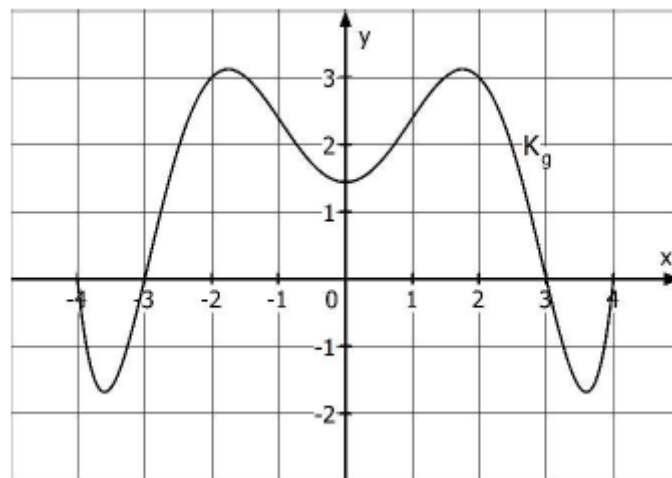
Dabei gilt: $A''(3) < 0$ und $A(0,5) < A(3)$ und $A(3,5) < A(3)$

- f) Eine quadratische Funktion p hat dieselben Nullstellen wie f . Die Graphen von p und f schließen im 4. Quadranten zwei gleich große Flächenstücke ein. Ermitteln Sie eine Gleichung von p .

1.2 (6 BE)

Die Abbildung zeigt den Graphen K_g einer Funktion g im Definitionsbereich $-4 \leq x \leq 4$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.



- (1) Die zugehörige Ableitungsfunktion g' hat genau 5 Nullstellen.
- (2) Es gilt: $\int_0^4 g(x) dx > 0$
- (3) Jede Stammfunktion von g ist für $0 \leq x \leq 4$ monoton wachsend.

1.3 (a) 3 BE b) 1 BE c) 4 BE)

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion k mit $k(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-t}$ ($t \geq 0$) beschreibt die Konzentration eines Medikaments im Blut.

Hierbei ist t die Zeit seit der Einnahme ($t = 0$) in Stunden.

$k(t)$ wird in Milligramm pro Liter $\left(\frac{\text{mg}}{\text{l}}\right)$ angegeben.

- a) Zeichnen Sie den Graphen von k für $0 \leq t \leq 10$.
- b) Geben Sie anhand der Zeichnung näherungsweise den Zeitpunkt an, zu welchem die Konzentration am stärksten abnimmt.
- c) Es gilt $k'(7) < 0$ und $k''(7) > 0$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser beiden Aussagen hinsichtlich des Verlaufs des Graphen von k . Interpretieren Sie diese beiden Aussagen im Sachzusammenhang.

2 Stochastik

2.1 (a) 6 BE b) 3 BE c) 4 BE)

Ein Kartenspiel besteht aus 4 Assen, 3 Königen, 2 Damen und 3 Buben.

- a) Mara zieht nacheinander 3 Karten. Gezogene Karten behält sie.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: Sie zieht genau 2 Asse.

B: Sie zieht mindestens eine Dame.

C: Sie zieht ein Ass, einen König und einen Buben

- b) Mara zieht nacheinander 30 Karten. Dabei notiert sich jeweils das Bild der gezogenen Karte und legt sie dann zurück in den Stapel. Der Stapel wird vor jedem Zug gemischt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie dabei genau 20 Asse zieht.

- c) Mara fügt dem Stapel nun 8 Karten hinzu und zieht wieder 30-mal mit Zurücklegen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 16 Asse gezogen werden, soll mehr als 50% betragen.
Ermitteln Sie die Anzahl an Assen, die Mara dem Stapel mindestens hinzufügen muss.

2.2 (a) 4 BE b) 3 BE)

Eine Befragung der Schüler einer Schule hat ergeben:

- 72% der Befragten nutzen ihr Smartphone länger als 4 Stunden pro Tag.
- 51% der Befragten sind mit ihrem aktuellen Notendurchschnitt unzufrieden
- 31% der Befragten nutzen ihr Smartphone länger als 4 Stunden pro Tag und sind mit ihrem aktuellen Notendurchschnitt zufrieden.

- a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler sein Smartphone höchstens 4 Stunden pro Tag nutzt und mit seinem aktuellen Notendurchschnitt unzufrieden ist.
- b) Die SMV der Schule behauptet, dass die beiden Ereignisse „Zufriedenheit mit dem aktuellen Notendurchschnitt“ und „Nutzung des Smartphones höchstens 4 Stunden am Tag“ stochastisch unabhängig voneinander sind.
Beurteilen Sie diese Behauptung aus mathematischer Sicht.

2 Stochastik (a) 2 BE b) 4 BE c) 3 BE d) 2 BE e) 4 BE f) 5 BE)

Man kann annehmen, dass 20% aller Frauen bevorzugt die linke Hand zum Beispiel zum Schreiben und Werfen verwenden.

Es werden mehrere Frauen befragt.

a) Nennen Sie zwei Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen, damit eine Zufallsgröße binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Von 3 befragten Frauen ist keine Linkshänderin.

B: Von 5 befragten Frauen sind genau 2 Linkshänderinnen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

C: Die Anzahl der Linkshänderinnen unter 120 befragten Frauen ist größer als 15, aber kleiner als 35.

d) Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses D lässt sich wie folgt berechnen:

$$P(D) = 10 \cdot 0,2^9 \cdot 0,8 + 0,2^{10}$$

Beschreiben Sie ein dazu passendes Ereignis D im Sachzusammenhang.

e) Ermitteln Sie, wie viele Frauen man mindestens befragen muss, damit sich unter diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens eine Linkshänderin befindet.

f) Es kursiert das Gerücht, dass die Linkshändigkeit unter Studentinnen der Physik deutlich weiter verbreitet ist als im Rest der weiblichen Bevölkerung. An einer Universität werden zwölf Physik-Studentinnen befragt. Vier von ihnen geben an, bevorzugt die linke Hand zu verwenden.

Lara behauptet: „Eigentlich werden statt vier Linkshänderinnen nur 2,4 erwartet, also bestätigt die Befragung das Gerücht.“

Omar widerspricht: „Dass allgemein von 12 Frauen vier oder mehr Linkshänderinnen sind, hat eine Wahrscheinlichkeit von über 20%. Mit dieser Befragung kann man das Gerücht also nicht bestätigen.“

Beurteilen Sie diese beiden Behauptungen.

3 Lineare Algebra

3.1 (a) 2 BE b) 1 BE c) 2 BE d) 3 BE e) 3 BE)

Die drei Punkte $P(-1|0|-6)$, $Q(0|-1|0)$ und $R(0|0|-2)$ liegen in der Ebene E .

Die Gerade g ist gegeben durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$.

- a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an.
- b) Ermitteln Sie den Spurpunkt der Ebene E mit der x_1 -Achse.
- c) Geben Sie die besondere Lage der Gerade g im Koordinatensystem an und begründen Sie Ihre Angabe.
- d) Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Gerade g die x_1x_2 -Ebene durchstößt.
- e) Geben Sie die Koordinaten des Punktes S an, in dem die Gerade g die x_1x_2 -Ebene durchstößt.

Der Punkt $T(1|3|-4)$ liegt in der Ebene E . Der Punkt U entsteht durch senkrechte Projektion des Punktes T auf die x_1x_2 -Ebene.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks STU .

3.2 (a) 4 BE b) 5 BE)

Gegeben sind die Punkte $A(-1|7|6)$, $B(1|3|8)$, $C(-3|-9|-1)$ und $D(-5|-5|-3)$.

- a) Zeigen Sie, dass die Punkte A , B , C und D ein Parallelogramm, aber kein Rechteck bilden.
- b) M ist der Mittelpunkt der Strecke AB und N ist der Mittelpunkt der Strecke BC . Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt der Strecken DM und AN die Strecke DM im Verhältnis 4:1 teilt.

3 Lineare Algebra (a) 4 BE b) 3 BE c) 2 BE d) 4 BE e) 4 BE f) 3 BE)

Im mittelamerikanischen Regenwald wird eine neu entdeckte Pyramide vermessen. Die Eckpunkte der Grundfläche sind $A(20|40|0)$, $B(-60|20|0)$, $C(-40|-60|0)$ und $D(40|-40|0)$. Die Spitze der Pyramide befindet sich bei $S(-10|-10|25)$. Alle Angaben sind in Metern.

- a) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem.
- b) Weisen Sie nach, dass die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat ist.
- c) Zeigen Sie, dass sich die Spitze der Pyramide senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrats befindet.
- d) Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie man die Inhalte der vier Seitenflächen der Pyramide mit den angegebenen Informationen und den Erkenntnissen aus den Teilaufgaben b) und c) berechnen kann.

(Hinweis: Die Berechnung selbst ist nicht notwendig.)

Vom Mittelpunkt der Kante AB aus verläuft ein kleiner Schacht zur Kante CS. Ein einziges Mal im Jahr scheint die Sonne durch diesen Schacht hindurch, d.h. die Sonnenstrahlen sind parallel zum Schacht. In diesem Fall haben die Strahlen die Richtung des Vektors $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ 80 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- e) Ermitteln Sie den Punkt auf der Kante CS, an dem der Schacht aus der Pyramide austritt.
- f) Berechnen Sie den Steigungswinkel des Schachtes.