Aufgabe 1:

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f. Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f.

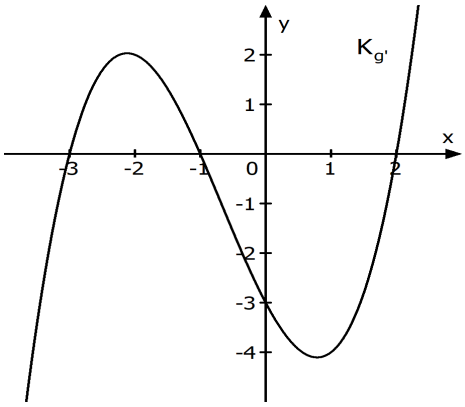
(5 Punkte)

1.2 Lösen Sie die Gleichung $x \cdot (x^3 + 1) \cdot (2x - 3) = 0$. (3 Punkte)

1.3 Beschreiben Sie, wie das Schaubild mit der Gleichung $y = -2e^x + 3$ aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = e^x$ hervorgeht. (3 Punkte)

1.4 Die Abbildung zeigt das Schaubild $K_{g'}$ der Ableitungsfunktion g' einer Funktion g. Das Schaubild von g ist K_g. Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. (6 Punkte)

(1) K_g besitzt genau zwei Wendepunkte.
(2) K_g besitzt genau zwei Hochpunkte.
(3) K_g besitzt genau zwei Tangenten, die parallel zur 1.Winkelhalbierenden verlaufen.



1.5 Berechnen Sie die Stammfunktion der Funktion h mit $h(x) = 4\sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild durch den Punkt $P(\pi \mid 1)$ verläuft. (4 Punkte)

1.6 Das Schaubild mit der Gleichung $y = a \cdot e^x + b$ schneidet die y-Achse in S(0|-1) und ihre waagrechte Asymptote hat die Gleichung y = -3. Bestimmen Sie a und b. (4 Punkte)

1.7 Geben Sie jeweils einen möglichen Wert für c an, so dass die Gleichung $2\cos(x) + 1 = c$ mit $0 \le x \le 2\pi$ genau eine, zwei oder keine Lösung hat.

(5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

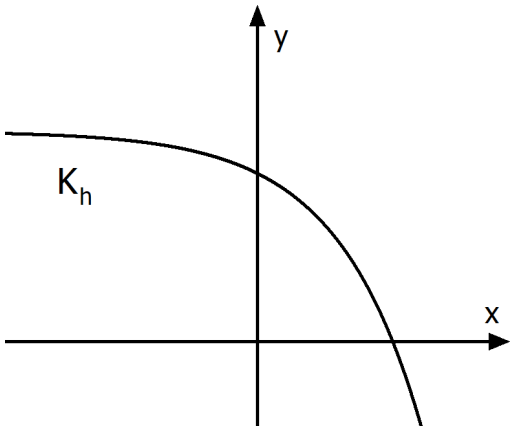
2.1 Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.
Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K_f und geben Sie das Krümmungsverhalten von K_f an. Zeichnen Sie K_f für $-1{,}5 \le x \le 1{,}5$.
(10 Punkte)

2.2 K_f und die Gerade mit der Gleichung y = 1 schließen im 1. Quadranten eine Fläche ein. Markieren Sie die beschriebene Fläche in Ihrer Zeichnung aus 2.1. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (5 Punkte)

2.3 Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3.Grades mit einer Nullstelle im Ursprung und einer weiteren an der Stelle x = 3, an der das Schaubild die x-Achse berührt. Weiterhin liegt der Punkt P(-1|-4) auf dem Schaubild von g. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g. (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -e^{0{,}5x} + 5,\ x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h.

2.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_h. (4 Punkte)



2.5 Die Punkte A(0|0), B(u|0), C(u|h(u)) und D(0|h(u)) bilden für $0{,}5 \le u \le 3$ ein Rechteck. Skizzieren Sie diesen Sachverhalt.
Bestimmen Sie u so, dass der Umfang des Rechtecks maximal wird.
Geben Sie den maximalen Umfang an. (7 Punkte)

Die Leistung einer Photovoltaikanlage in Kilowatt (kW) an einem Tag wird beschrieben durch die Funktion p mit $p(t) = 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right)$ mit $t \in [0;12]$.

t ist die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn, t = 0 entspricht der Uhrzeit 7 Uhr morgens.

3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von p.
Geben Sie an, zu welcher Uhrzeit die Photovoltaikanlage die höchste Leistung hat. Geben Sie diese Leistung an. (5 Punkte)

3.2 Für den Betrieb eines Wäschetrockners ist eine Leistung von 3,5 kW erforderlich. Berechnen Sie, in welchem Zeitraum der Wäschetrockner ausschließlich mit der Photovoltaikanlage betrieben werden kann.
Die Trocknung einer Ladung Wäsche dauert 3 Stunden.
Geben Sie an, zu welcher Uhrzeit der Wäschetrockner hierzu spätestens gestartet werden muss. (7 Punkte)

3.3 Unter Leistung versteht man die momentane Änderungsrate der Energie.
Berechnen Sie das Integral $\int_2^{10} p(t)dt$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot e^{0,25x} + x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild heißt K_f.

3.4 Zeichnen Sie K_f für $-5 \le x \le 8$.
Geben Sie die Gleichung der Asymptote an. (4 Punkte)

3.5 Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von K_f und untersuchen Sie, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.
Geben Sie an, wie K_f verschoben werden muss, damit der Extrempunkt auf der x-Achse liegt. (6 Punkte)

3.6 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_f an der Stelle x = 0. (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2,\ x\in\mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

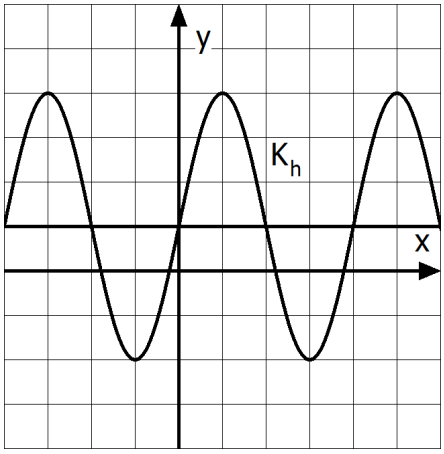
4.1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte von K_f mit der x-Achse.
Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K_f.
Zeichnen Sie das Schaubild für $-2\le x\le 5$. (9 Punkte)

4.2 Zeigen Sie, dass die Gerade g: $y=\frac{9}{4}x+\frac{5}{4}$ das Schaubild K_f in $R(-1|-1)$ berührt und in S(5|12,5) schneidet.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche von der Geraden g und K_f eingeschlossen wird. (8 Punkte)

4.3 Überprüfen Sie, ob Punkte auf K_f existieren, in denen die Steigung der Tangente den Wert -2 annimmt.
Geben Sie die kleinstmögliche Steigung von K_f an. (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x)=3\sin(2x)+1,\ x\in\mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h.

4.4 Ergänzen Sie die Skalierung im nebenstehenden Koordinatensystem. (2 Punkte)



4.5 Beschreiben Sie eine Vorgehensweise zur Bestimmung der Koordinaten von zwei Wendepunkten für $x\le 0$. Geben Sie die Koordinaten für zwei dieser Punkte an. (3 Punkte)

4.6 Begründen Sie, ob folgende Aussage wahr oder falsch sind.
(1) Die Ableitungsfunktion h' von h hat die gleiche Periode wie h.
(2) Die zweite Ableitungsfunktion h'' von h hat die gleiche Amplitude wie h.

(4 Punkte)