Aufgabe 1: (2 VP)

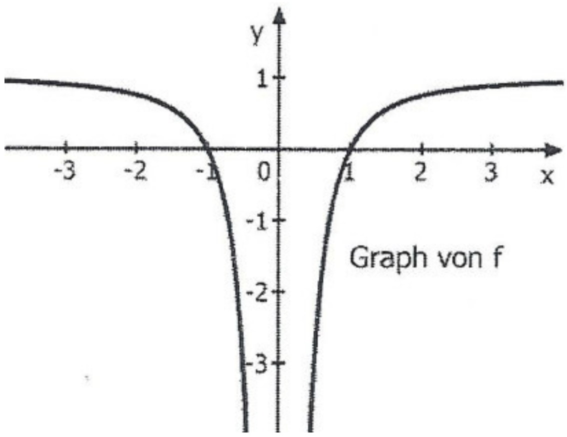
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^4 \cdot \sin(3x)$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Lösen Sie die Gleichung $(\cos(x))^2 + 2\cos(x) = 0$ für $0 \le x \le 2\pi$

Aufgabe 3: (2,5 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat.
Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.
Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung y = -3 gegeben.



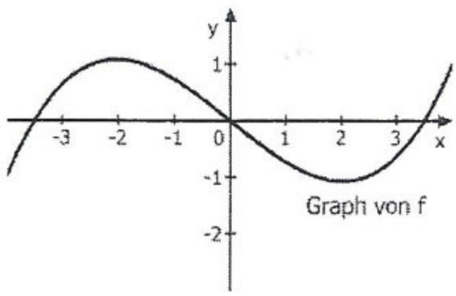
a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinaten $\frac{1}{2}$ hat.

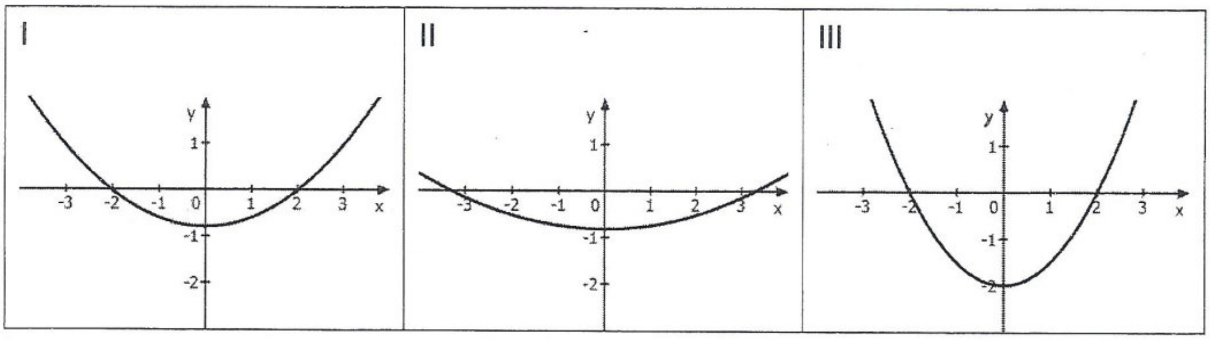
b) Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Aufgabe 4: (2,5 VP)

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f.
Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.





b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall [1;3] an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 5: (4 VP)

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Ebene E: $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14$.

a) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.
b) Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Gerade g an der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

Aufgabe 6: (4 VP)

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem g die x_2x_3 -Ebene schneidet.
b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(-3|-1|7) von der Geraden g.

Aufgabe 7: (3 VP)

In einer Urne sind eine rote, eine weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis man eine schwarze Kugel zieht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Man zieht genau zwei Kugeln“.
B: „Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel“.

Aufgabe A 1.1

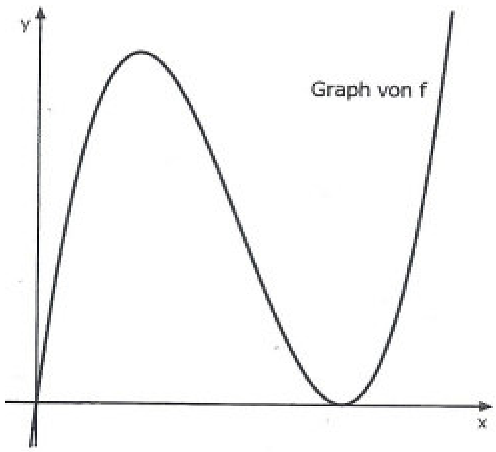
Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \le t \le 17$ die Höhe einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Wochen und f(t) die Höhe in Zentimetern.

a) Geben Sie den Zeitraum an, in dem die Höhe der Pflanze von 20 cm auf 40 cm zunimmt.
Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Pflanzenhöhe 3,5 Wochen nach Beobachtungsbeginn.
Die Funktion f hat bei t = 6,5 eine Wendestelle.
Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.
(4 VP)

b) Formulieren Sie zu der Gleichung $f(t+2) - f(t) = 5$ eine Fragestellung im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an.
(2,5 VP)

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$.
Die Abbildung zeigt ihren Graphen.



a) Weisen Sei nach, dass der Punkt T(6|0) Tiefpunkt des Graphen ist.

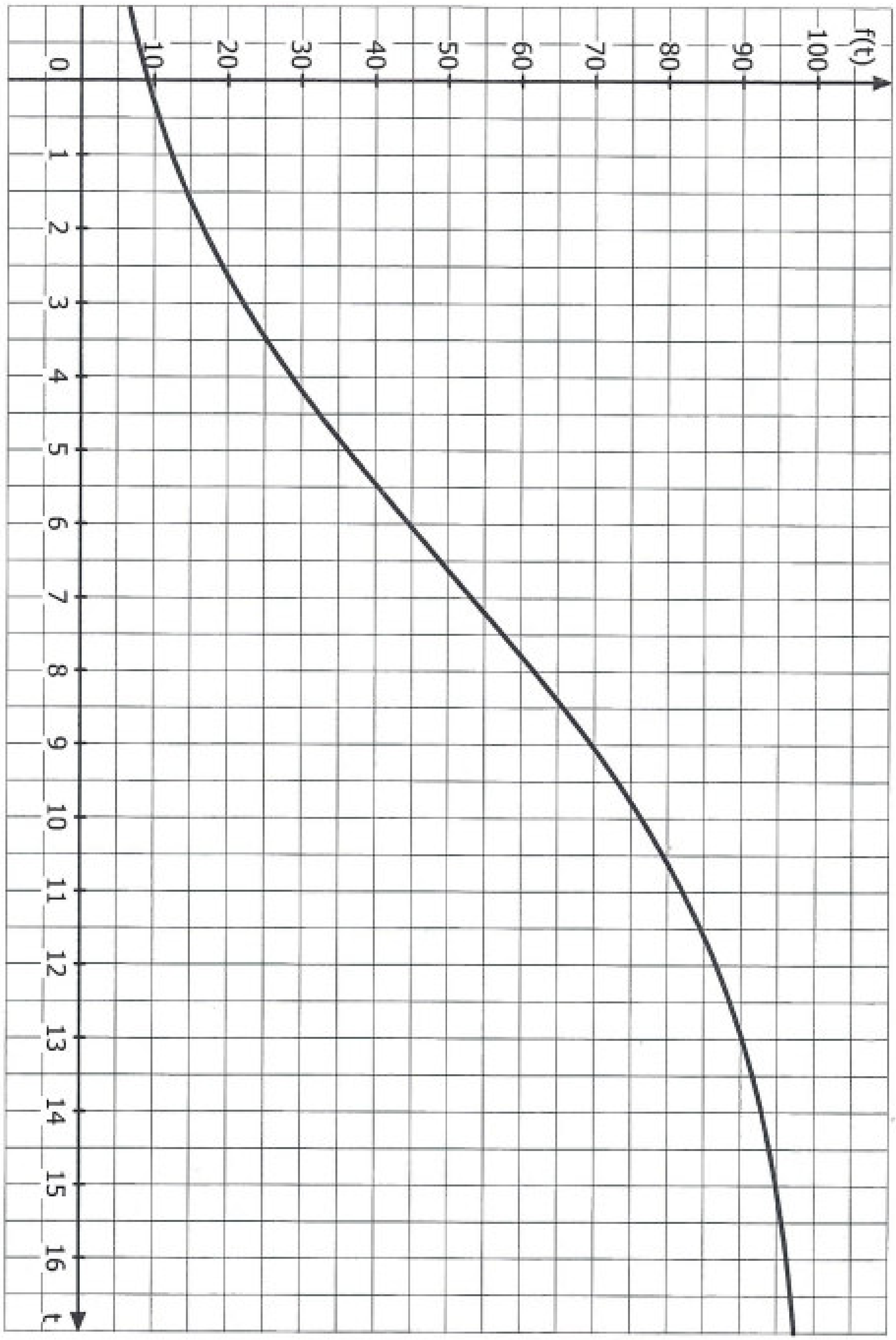
Betrachtet wird die Strecke OH zwischen O(0|0) und dem Hochpunkt H(2|8) des Graphen von f. Diese Strecke und der Graph von f begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie deren Inhalt.
(5 VP)

b) Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -3 \cdot f(x) - 6$.
Beschreiben Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht.
Bestimmen Sie damit die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von g.
(3 VP)

c) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden mit der Gleichung x = 1 liegt, berührt den Graphen von f im Punkt P(4|4). Berechnen Sie die Koordinaten von M.
(2,5 VP)

d) Für jedes k mit $k \ne 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch
$f_k(x) = \frac{1}{2k}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}kx$.
Berechnen Sie die Werte von k, für die die Tangente an den Graphen von f_k im Punkt $P(1|f_k(1))$ parallel zur Geraden mit der Gleichung y = 8x + 3 ist.
(3 VP)

Abbildung zu Aufgabe A 1.1



Aufgabe A 2.1

In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

Versuchsreihe 1

Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit

$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, f(t) in mm²).

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.
Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

(3,5 VP)

b) Berechnen Sie $\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t)dt$
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

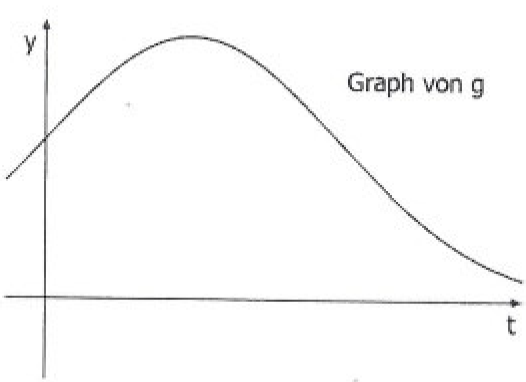
(3,5 VP)

Versuchsreihe 2

Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit

$g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, g(t) in mm²)

Die Abbildung zeigt den Graphen von g.



c) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an.
Berechnen Sie diesen Wert.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(5 VP)

d) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(t) = g(t+10)$.
Für jede reelle Zahl t gilt: $h(-t) = h(t)$.
Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann.

(2 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 8t$.
Der Graph der Funktion f_t ist G_t.

a) Bestimmen Sie t so, dass der Punkt P(1|4) auf dem Graphen G_t liegt.

(1 VP)

b) Jeder Graph G_t hat an der Stelle $x = \sqrt{t}$ einen Tiefpunkt.
Berechnen Sie denjenigen Wert von t, für den dieser Tiefpunkt möglichst hoch liegt.

(2,5 VP)

c) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die sämtliche Graphen G_t verlaufen.

(2,5 VP)

Aufgabe B1:

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Würfel ABCDEFGH mit A(0|0|0) und G(5|5|5) in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten K(5|0|1), L(2|5|0), M(0|5|2) und N(1|0|5).

a) Zeichnen Sie das Viereck KLMN in die Abbildung ein.
Zeigen Sie, dass das Viereck KLMN ein Trapez ist und zwei gleich lange Seiten hat.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von T mit der x_1 -Achse an.
(Teilergebnis: T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$)

(5 VP)

b) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche KLMN liegt auf der Strecke FG.
Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen kann.

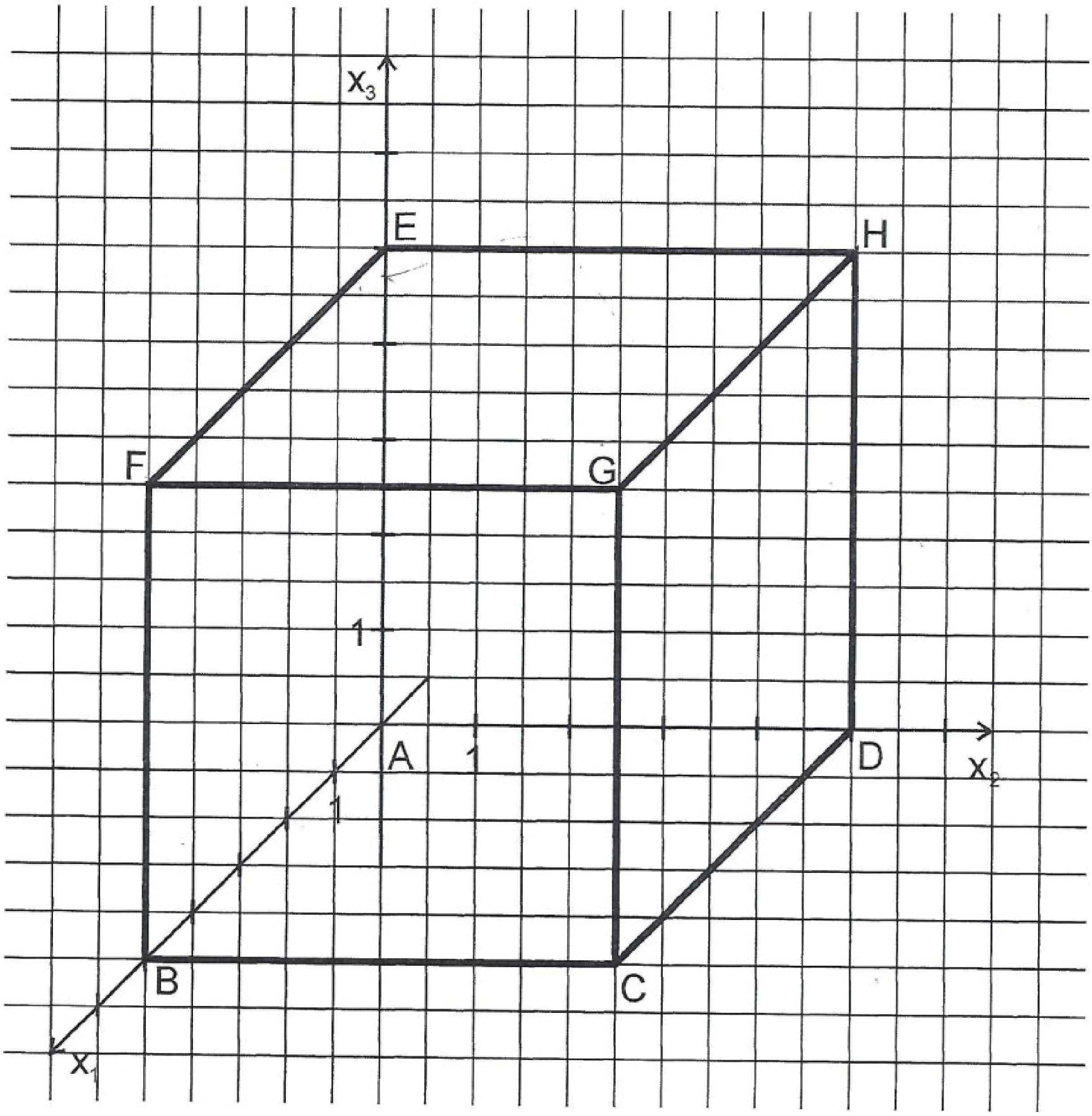
(2 VP)

c) Betrachtet wird die Schar der Geraden

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a > 0.$$

Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3,5$ liegt.
Gegeben ist die Ebene U: $-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$.
Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und U zur betrachteten Schar gehört.

(3 VP)


x3
E
H
F
G
1
A
1
D
x2
1
B
C
x1

Aufgabe B 2:

Die Punkte A(6|6|0), B(2|8|0) und O(0|0|0) sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S(4|6|10). Die Ebene E enthält die Punkte A,B und C(2|3|5).

a) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
(Teilergebnis: E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$)

(3 VP)

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die das Dreieck ABC als Grundfläche und den Punkt S als Spitze hat.

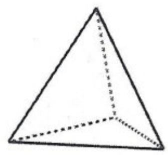
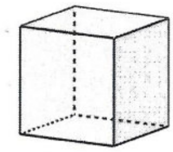
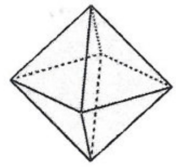
(4 VP)

c) In einem Koordinatensystem, bei dem die x_1x_2 -Ebene den Erdboden beschreibt, stellt die Pyramide ABOS ein Kunstwerk dar (Koordinatenangaben in m).
An der Stelle, die durch den Punkt F(8|3|0) beschrieben wird, steht ein Mast senkrecht auf den Erdboden. Auf den Mast treffendes Sonnenlicht lässt sich durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschreiben.
Der Schattenpunkt der Mastspitze liegt auf der Kante des Kunstwerks, die durch die Strecke OS beschrieben wird.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Höhe des Masts rechnerisch bestimmen kann.

(3 VP)

Aufgabe C 1

Betrachtet werden Körper, die auf jeder Seitenfläche mit einer Zahl beschriftet sind.

Körper	Tetraeder 	Würfel 	Oktaeder 
Anzahl der Seitenflächen	vier	sechs	acht
beschriftet mit	1, 2, 3, 4	1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Beim Werfen eines Körpers gilt die Zahl als geworfen, auf der der Körper zum Liegen kommt. Dabei werden bei jedem Körper die möglichen Zahlen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit geworfen.

a) Ein Tetraeder wird 100-mal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
A: „Die Zahl 1 wird genau 30-mal geworfen".
B: „Die Zahl 1 wird mindestens 20-mal geworfen."
(1,5 VP)

b) Ermitteln Sie, wie oft man ein Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal die Zahl 1 zu werfen.
(2 VP)

c) Ein Tetraeder, ein Würfel und ein Oktaeder werden gleichzeitig geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
C: „Bei allen drei Körpern wird dieselbe Zahl geworfen."
D: „Die Summe der geworfenen Zahlen beträgt 17."
(2,5 VP)

d) Für einen Einsatz von 50 Cent darf ein Spieler ein Tetraeder und einen Würfel einmal werfen. Anschließend erhält er die Anzahl der geworfenen Einsen in Euro ausbezahlt.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn des Spielers.
(2 VP)

e) In einem Sack befinden sich 20 Körper. Es handelt sich dabei um Tetraeder und Oktaeder, wie sie oben beschrieben sind. Einer dieser Körper wird zufällig gezogen und anschließend geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei die Zahl 2 zu werfen, beträgt 15%.
Berechnen Sie die Anzahl der Tetraeder im Sack.
(2 VP)

Aufgabe C2:

Ein Glücksspielautomat enthält drei gleiche Glücksräder, die jeweils wie dargestellt in fünf gleich große Kreissektoren eingeteilt sind.
Bei jedem Spiel werden die Räder in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau ein Symbol im jeweiligen Rahmen angezeigt wird. Ein Spieler gewinnt nur dann, wenn alle drei Räder einen Stern zeigen.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Spiel 6,4% beträgt.
Ein Spieler spielt 20 Spiele.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Der Spieler gewinnt mehr als einmal.“
B: „Der Spieler gewinnt in genau zwei Spielen und diese folgen direkt aufeinander.“
(3 VP)

b) Eine Spielerin spielt 9 Spiele.
Für ein Ereignis C gilt dabei $P(C) = 0{,}064^a + 9 \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936^b$.
Geben Sie geeignete Werte für a und b an und beschrieben Sie das Ereignis C im Sachzusammenhang.
(2 VP)

c) Es wird vermutet, dass das mittlere Rad zu selten ein Sternsymbol zeigt. Deshalb wird die Nullhypothese „Das mittlere Rad zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens zwei Fünfteln ein Sternsymbol.“ getestet. Man vereinbart ein Signifikanzniveau von 3% und einen Stichprobenumfang von 300 Drehungen.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
(2,5 VP)

d) Die Glücksräder des Automaten werden durch drei neue ersetzt, die sich nicht voneinander unterscheiden. Die Glücksräder sind in mehrere gleich große Sektoren unterteilt. Jedes Glücksrad trägt in genau einem Sektor ein Sternsymbol. Man gewinnt bei 50 Spielen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% höchstens einmal.
Bestimmen Sie die minimale Anzahl der Sektoren pro Glücksrad.
(2,5 VP)