Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-5x}$.

Aufgabe 2: (1,5 VP)

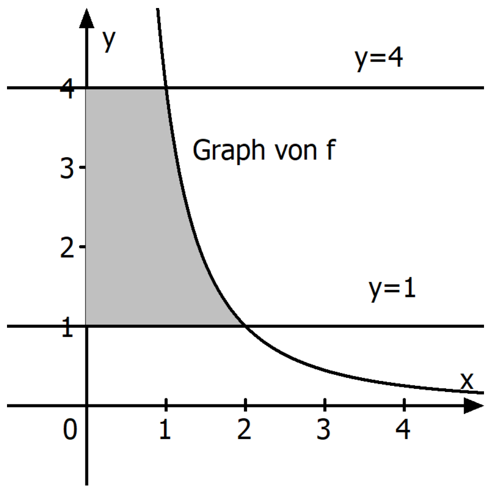
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{4x-7}$, für die F(2) = 1 ist.

Aufgabe 3: (1,5 VP)

Lösen Sie die Gleichung $(x^2+8)\cdot(e^{x-1}-1)=0$.

Aufgabe 4: (2,5 VP)

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ schneidet die Gerade mit der Gleichung y = 4 im Punkt P(1|4) und die Gerade mit der Gleichung y = 1 im Punkt Q(2|1).
Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



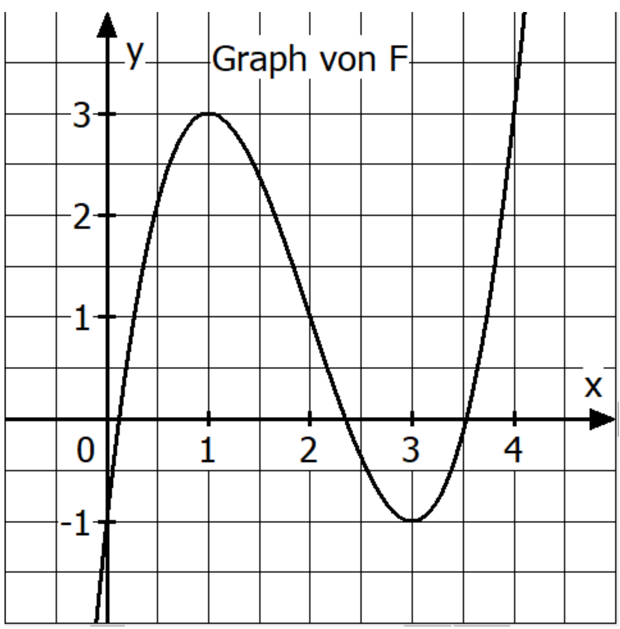
Aufgabe 5: (2,5 VP)

Abgebildet ist der Graph einer Funktion F.
F ist Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion f.

a) Geben Sie eine Nullstelle von f im abgebildeten Bereich an.

b) Bestimmen Sie $\int_1^2 f(x)dx$.

c) Begründen Sie, dass die Funktion f im Bereich $0{,}5 \le x \le 1{,}5$ streng monoton fallend ist.



Aufgabe 6: (5 VP)

Gegeben sind die Ebenen $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und $F: 2x_2 + x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.
c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes O(0|0|0) von der Ebene E.

Aufgabe 7: (2,5 VP)

Eine Gerade ist orthogonal zur Ebene $E: x_1 - x_3 = 5$ und schneidet die x_1-Achse in einem Punkt, der vom Punkt P(0|2|1) den Abstand 3.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden.

Aufgabe 8: (2,5 VP)

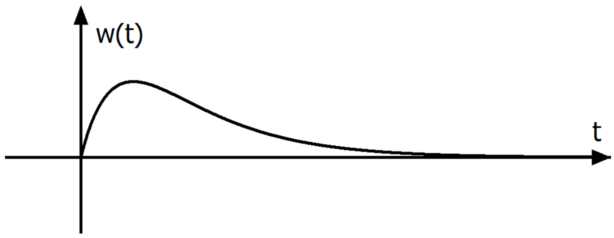
Auf einem Tisch liegen verdeckt vier rote und zwei schwarze Karten, mit denen Anna und Bernd das folgende Spiel spielen: Anna deckt in der ersten Runde nacheinander zwei Karten auf und legt sie nebeneinander auf den Tisch. Ist darunter mindestens eine schwarze Karte, dann gewinnt Anna und das Spiel ist beendet. Andernfalls deckt Bernd nacheinander zwei der übrigen Karten auf. Deckt er dabei mindestens eine schwarze Karte auf, so gewinnt er, ansonsten gewinnt Anna.

Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: Anna gewinnt das Spiel in der ersten Runde.
B: Anna gewinnt das Spiel.

Aufgabe A 1.1

Betrachtet wird das Wachstum einer Palme. Ihre Höhe beträgt zu Beobachtungsbeginn einen Meter, die momentane Wachstumsrate ihrer Höhe wird durch die Funktion w mit

$w(t) = 4 \cdot \left(e^{-t} - e^{-2t}\right);\ t \geq 0$



(t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, w(t) in Meter pro Jahr) beschrieben.
Die Abbildung zeigt den Graphen von w.

a) Geben Sie die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt t = 1 an.
Begründen Sie anhand des Graphen, dass die Höhe der Palme im abgebildeten Zeitraum nie abnimmt.
Die Funktion w besitzt im abgebildeten Bereich eine Wendestelle.
Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.
Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen momentanen Wachstumsrate.

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Höhenzunahme der Palme im zweiten Jahr nach Beobachtungsbeginn.
Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm der Funktion h, der die Höhe der Palme zum Zeitpunkt t angibt.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem die Palme eine Höhe von 1,50 m hat.
Untersuchen Sie, welche Höhe die Palme maximal erreichen kann.

Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung

$\frac{h(t+0,5)}{h(t)} = 1,5$ führt.

(8 Punkte)

Aufgabe A 1.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -\frac{1}{8}x^4 + a^2x^2$.

a) Abgebildet sind drei Graphen.
Begründen Sie, dass zwei dieser Graphen nicht zu einer Funktion f_a gehören.
Der verbleibende Graph gehört zu einer Funktion f_a.
Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.

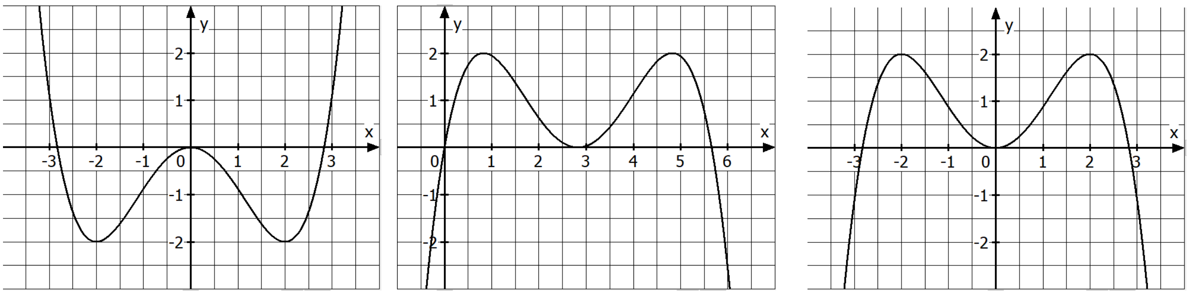


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3

(3 Punkte)

b) Jede Funktion f_a besitzt an der Stelle $x_1 = 2a$ ein Maximum.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der die zugehörige Hochpunkte aller Graphen von f_a liegen.

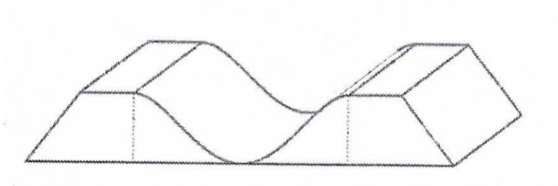
(2 Punkte)

c) Der Punkt O(0|0) sowie die Punkte $P(4a\,|\,-16a^4)$ und $Q(-4a\,|\,-16a^4)$ des Graphen von f_a bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den dieses Dreieck gleichseitig ist.

(3 Punkte)

Aufgabe A 2.1

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Station in einem Bikepark, die aus zwei seitlichen Wällen und einer Fahrrinne besteht.



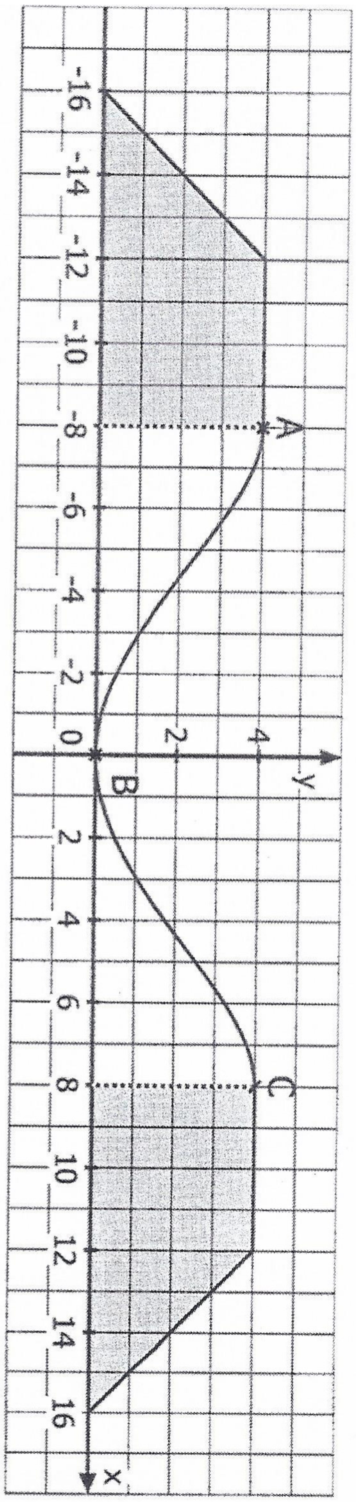
Die Abbildung in der Anlage zeigt modellhaft ihren Querschnitt. Dabei wird die Fahrrinne durch den Graphen einer Funktion f im Bereich $-8 \leq x \leq 8$ modelliert (Angaben in Meter). Die Querschnitte der Wälle sind grau markiert. Der horizontale Untergrund wird im Querschnitt durch die x-Achse beschrieben. Die Station hat auf ihrer gesamten Länge den in der Abbildung gezeigten Querschnitt.

a) Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen anhand des Graphen in der Anlage.
Bestimmen Sie die Breite der Fahrrinne in einer Höhe von 1m über dem Untergrund.
Ermitteln Sie die mittlere Steigung zwischen den im Modell mit B und C bezeichneten Punkten.
Bestimmen Sie die maximale Steigung der Fahrrinne.
Begründen Sie, dass f keine ganzrationale Funktion zweiten Grades sein kann.
(4,5 Punkte)

b) Es ist $f(x) = -\frac{1}{1024}x^4 + \frac{1}{8}x^2$.
Berechnen Sie die Höhe, in der die Fahrrinne eine Breite von 12m hat.
Das verbaute Material hat ein Gesamtvolumen von 1168 m³.
Ermitteln Sie die Länge der Station.
(5 Punkte)

c) Die abgebildete Fahrrinne lässt sich auch näherungsweise durch den Graphen einer trigonometrischen Funktion g modellieren, der die Punkte A, B und C als Extrempunkte besitzt.
Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm von g.
(2,5 Punkte)

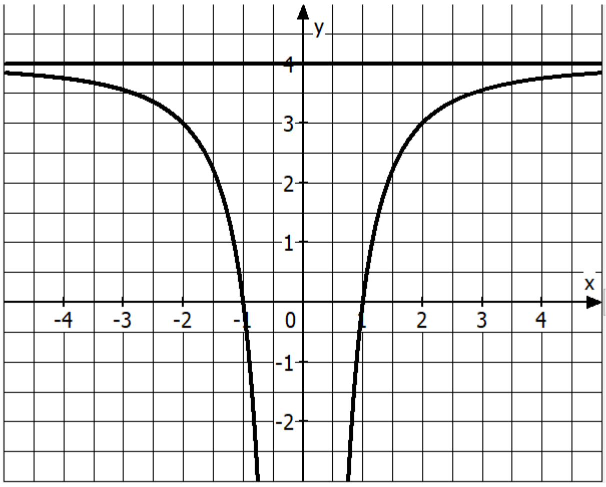
Abbildung zu Aufgabe 2.1:



Aufgabe A 2.2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$.

Ihr Graph K sowie die Gerade g: y = 4 sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



a) Der Punkt P(u|v) mit u > 0 ist ein Punkt auf K.
Die Punkte P, Q(u|4), R(0|4) und S(0|v) sind die Ecken eines Rechtecks.
Bei Rotation dieses Rechtecks um die y-Achse entsteht ein Zylinder.
Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Zylinders unabhängig von u ist.
Berechnen Sie denjenigen Wert von u, für den der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders 4π beträgt.

(4 Punkte)

b) Für jeden Punkt auf K begrenzen die zugehörige Tangente an K, die Gerade g und die y-Achse ein Dreieck. Für einen solchen Punkt T mit positiver x-Koordinate ist dieses Dreieck gleichschenklig.
Berechnen Sie die x-Koordinate dieses Punktes T.

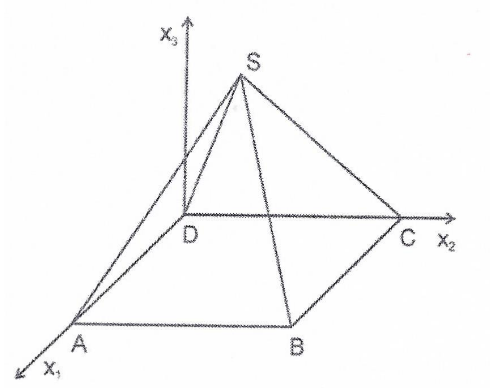
(2 Punkte)

c) C ist der Graph der Funktion h mit $h(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$.
K geht durch eine Streckung in y-Richtung und eine Streckung in x-Richtung aus C hervor.
Ermitteln Sie die beiden zugehörigen Streckfaktoren.

(2 Punkte)

Aufgabe B1:

Ein Ausstellungsraum hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Die Eckpunkte des Bodens können in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch die Punkte A(18|0|0), B(18|18|0), C(0|18|0) und D(0|0|0) dargestellt werden (siehe Abbildung).
Die Spitze des Raumes wird durch den Punkt S(9|9|12) beschrieben, die rechte Seitenwand durch das gleichschenklige Dreieck BCS (alle Koordinatenangaben in Meter).



a) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Kanten, die durch die Strecken BC und BS beschrieben werden.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der das Dreieck BCS liegt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der rechten Seitenwand.
(Teilergebnis: E: $4x_2 + 3x_3 = 72$)

(5 Punkte)

Eine punktförmige Lampe befindet sich am unteren Ende einer fünf Meter langen Stange, die von der Raumspitze ausgeht und senkrecht nach unten hängt.

b) Die Stange mit der Lampe kann in eine Pendelbewegung versetzt werden.
Diese Pendelbewegung verläuft im Modell in einer Ebene parallel zur x_2x_3-Ebene.
Wenn die Lampe zu stark schwingt, dann trifft sie die rechte Seitenwand.
Der Auftreffpunkt wird im Modell durch den Punkt P beschrieben.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

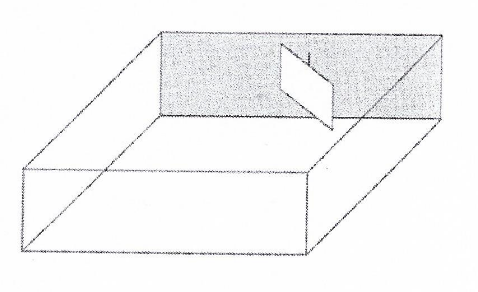
(2 Punkte)

c) Im Rahmen einer Kunstausstellung wurde ein drei Meter langer Stab senkrecht zum Boden angebracht, der im Modell durch die Strecke FG mit F(11|15|0) beschrieben wird.
Befindet sich die Lampe in der Position, die durch L(9|9|7) beschrieben wird, so wirft der Stab einen Schatten, dessen Endpunkt auf der rechten Seitenwand durch G* beschrieben wird.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G*.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Gesamtlänge des betrachteten Schattens berechnen kann.

(3 Punkte)

Aufgabe B 2:

In einem Klassenzimmer befindet sich eine rechteckige Projektionsfläche. Ihre Eckpunkte werden in einem Koordinatensystem durch die Punkte A(0|4,4|1), B(1|6,8|1), C(1|6,8|2,6) und D(0|4,4|2,6) dargestellt (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Klassenzimmerwand hinter der Projektionsfläche liegt in einer Ebene, die durch die x_2x_3-Ebene beschrieben wird.



a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen der Projektionsfläche.
Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, den die Projektionsfläche und die dahinter liegende Wand des Klassenzimmers einschließen.
(Teilergebnis: E: $12x_1 - 5x_2 = -22$)

(4 Punkte)

b) Ein Schüler zielt mit einem Laserpointer auf die Projektionsfläche. Die Lichtquelle wird im Modell durch den Punkt L(4|2|1) dargestellt, der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschreibt die Richtung des Laserstrahls.
Überprüfen Sie, ob der Laserstrahl die Projektionsfläche trifft.

(2,5 Punkte)

Die Projektionsfläche ist so befestigt, dass sie sich um eine vertikale Achse drehen lässt. Im Modell lassen sich mögliche Lagen der Projektionsfläche durch Ebenen der Schar

$$E_a : 12x_1 + 5ax_2 = 28a + 6 \;;\; a \in \mathbb{R}$$

beschreiben.

c) Weisen Sie nach, dass der Mittelpunkt der Strecke CD in jeder Ebene der Schar liegt.
Die Drehachse wird im Modell durch eine Strecke beschrieben.
Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die diese Strecke enthält.

(1,5 Punkte)

d) Begründen Sie, dass die Ebene E_1 eine Lage beschreibt, in der die Projektionsfläche an der dahinterliegenden Wand anstößt.

(2 Punkte)

Aufgabe C 1

Auf einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perlengewinnung gezüchtet. Erfahrungsgemäß bringen 70% der Muscheln keine Perlen hervor. In den restlichen Muscheln befindet sich jeweils genau eine Perle, aber nur 10% der Perlen entsprechen dem geforderten Qualitätsstandard.

a) Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln ist keine Perle.
B: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mindestens zwei Perlen.
C: In 100 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mehr als drei Perlen, die dem Geforderten Qualitätsstandard entsprechen.

(3 Punkte)

b) Ermitteln Sie die Anzahl der Muscheln, die man mindestens öffnen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine Perle zu finden ist.

(2 Punkte)

c) Ein Muschelzüchter hat eine neue Zuchtmethode entwickelt. Er behauptet, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Muschel eine Perle hervorbringt, zu erhöhen.
Um die Behauptung zu überprüfen, wird die Nullhypothese „Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 30% bringt eine Muschel eine Perle hervor."
getestet. Man vereinbart einen Stichprobenumfang von 200 Muscheln und ein Signifikanzniveau von 5%.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(2,5 Punkte)

d) Ein Goldschmied hat in einer Schale weiße und schwarze Perlen. Es sind mehr schwarze als weiße Perlen. Insgesamt sind es 21 Perlen. Der Goldschmied zieht zufällig zwei Perlen ohne Zurücklegen aus der Schale. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Farben der beiden Perlen unterscheiden, beträgt $\frac{8}{21}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der schwarzen Perlen, die vor dem Ziehen in der Schale waren.

(2,5 Punkte)

Aufgabe C2:

In einer Urne befinden sich drei rote, eine weiße und sechs schwarze Kugeln.

a) Es werden nacheinander acht Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: Genau drei dieser Kugeln sind rot.
B: Mehr als zwei und weniger als sechs dieser Kugeln sind rot.
C: Die ersten drei Kugeln haben dieselbe Farbe.

(3 Punkte)

b) Geben Sie im Zusammenhang mit der oben beschriebenen Urne ein Zufallsexperiment und ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2$$

(1,5 Punkte)

c) Bei einem Spiel werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Ist die weiße Kugel dabei, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück. Bei zwei Kugeln mit gleicher Farbe enthält er vier Euro ausbezahlt. In allen anderen Fällen gibt es keine Auszahlung.
Bestimmen Sie die Höhe des Einsatzes, so dass dieses Spiel fair ist.

(2,5 Punkte)

d) In einer anderen Urne befinden sich 200 schwarze und fünf rote Kugeln.
Ein Spieler zieht 15-mal nacheinander eine Kugel und legt sie jeweils direkt wieder zurück. Er gewinnt, wenn er mindestens eine rote Kugel zieht.
Berechnen Sie seine Gewinnwahrscheinlichkeit.

Dem Spieler wird folgendes Angebot gemacht. Er kann auf Züge verzichten, dafür werden weitere rote Kugeln in die Urne gelegt. Der Spieler muss vor dem Ziehen erklären, auf wie viele Züge er verzichtet. Für jeden weggelassenen Zug werden zwei rote Kugeln zusätzlich in die Urne gelegt.
Geben Sie einen Term an, mit dem die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zahl z der weggelassenen Züge berechnet werden kann.
Ermitteln Sie, auf wie viele Züge er verzichten muss, damit seine Gewinnwahrscheinlichkeit am größten ist.

(3 Punkte)