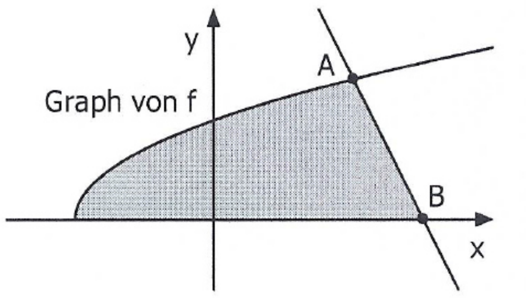
Aufgabe 1: (0,5 VP und 2 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x+2}$ und die Gerade durch die Punkte A(2|2) und B(3|0).



a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f an.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

.

Aufgabe 2: (1 VP und 1,5 VP)

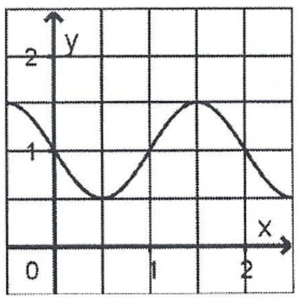
Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f, dessen einzige Extrempunkte A(-1|1) und B(0|0) sind, sowie den Punkt P.

a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x)=-f(x-3)$ an.

b) Der Graph einer Stammfunktion von f verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in der Abbildung.

Aufgabe 3: (1 VP und 1,5 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



a) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
„Für jeden Wert von x mit $0 \le x \le 2$ ist die Steigung des Graphen von f kleiner als 3.“

b) Mit dem Term $\pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2\,dx$ kann das Volumen eines Körpers berechnet werden. Begründen Sie, dass dieses Volumen größer als $\pi \cdot 0{,}5^2 + \pi \cdot 1^2$ ist.

Aufgabe 4: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass g in der Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.

b) Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

Aufgabe 5: (0,5 VP und 2 VP)

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass g und h nicht identisch sind.

b) Die Gerade g soll durch Spiegelung an einer Ebene auf die Gerade h abgebildet werden. Bestimmen Sie eine Gleichung einer geeigneten Ebene und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

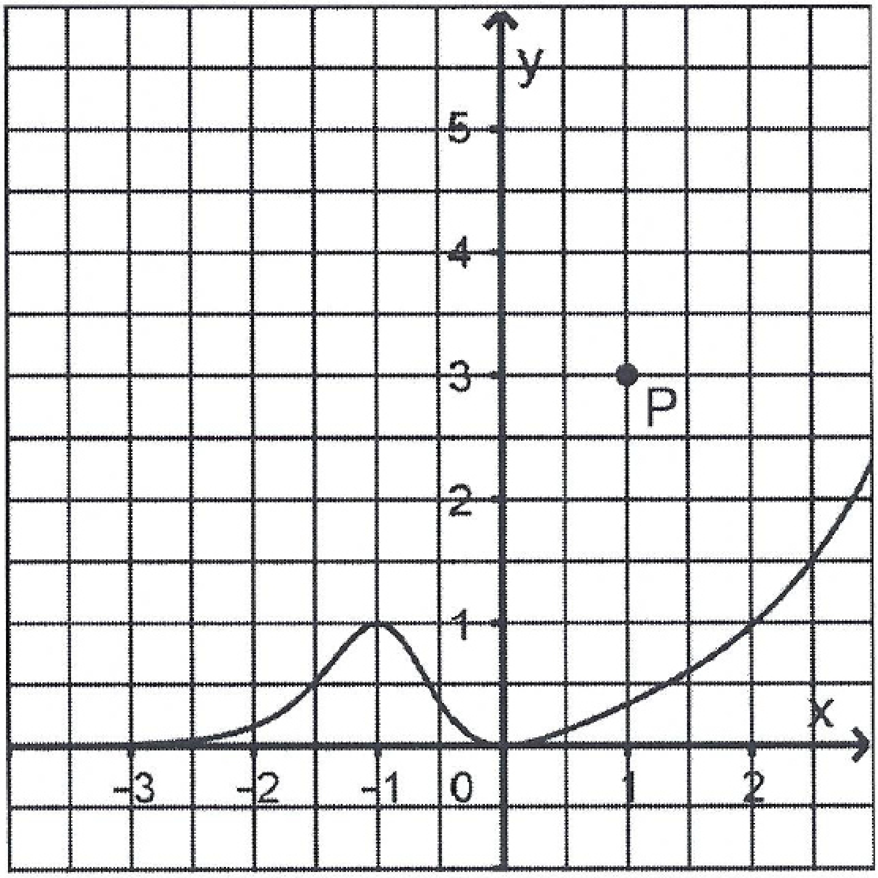
Aufgabe 6: (0,5 VP und 2 VP)

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht.
Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl a.
Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

a) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann.

b) Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von X ist 4.
Bestimmen Sie den Wert von a.

Abbildung zu Aufgabe 2 (Pflichtteil Aufgabensatz 1)



Aufgabe 1: (1 VP und 1,5 VP)

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2)=0$ und $f''(x_2)\neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3.

Die Abbildung in der Anlage zeigt die Position von x_1, x_2 und x_3.

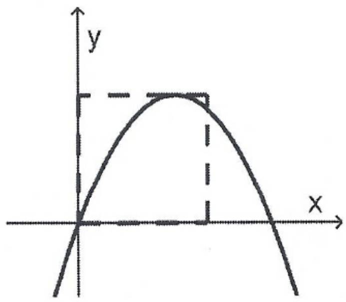
a) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.
b) Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f.

Aufgabe 2: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=-x^2+2ax$, $a\in\,]1;+\infty[$.
Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein.
Bestimmen Sie den Wert von a.

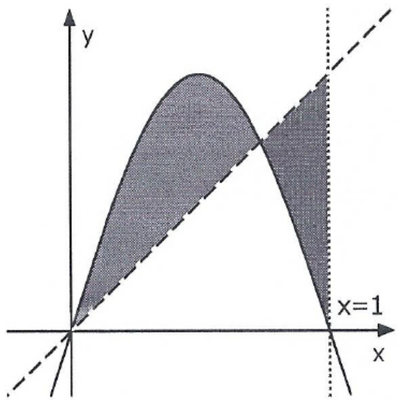


Aufgabe 3: (1 VP und 1,5 VP)

Abgebildet sind der Graph der Funktion f mit $f(x)=\sin(\pi x)$ sowie eine Ursprungsgerade g mit der Steigung m.

a) Bestimmen Sie einen Term der Stammfunktion von f, deren Graph den Ursprung enthält.

b) Berechnen Sie den Wert von m, für den die Inhalte der beiden markierten Flächen gleich groß sind.



Aufgabe 4: (0,5 VP und 2 VP)

Gegeben sind die Punkte A(3|5|5) und B(1|1|1) sowie die Geraden g und h, die sich in B schneiden.

Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

a) Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck ABCD eine Raute ist.

Aufgabe 5: (1 VP und 1,5 VP)

Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit den Zahlen 2 bzw. 3 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen die Zahl 2 erzielt wird, beträgt p. Bei einem Spiel dreht eine Person das Glücksrad genau so oft, bis die Summe der erzielten Zahlen 5, 6 oder 7 beträgt. Bei der Summe 6 gewinnt die Person das Spiel, sonst verliert sie.

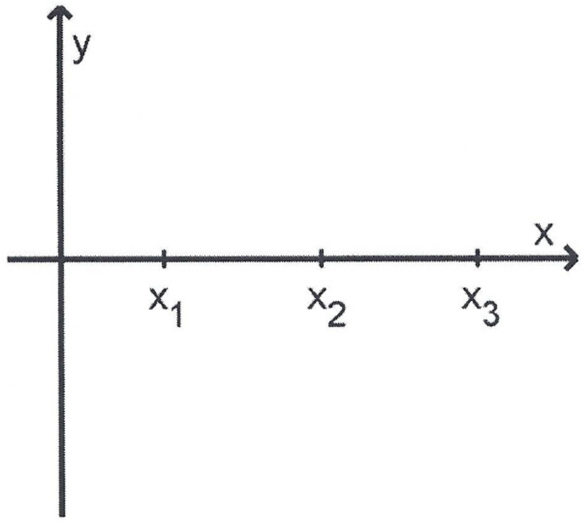
a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.
b) Die beiden folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig:
E: „Beim Drehen des Glücksrads wird die Zahl 2 erzielt."
G: „Die Person gewinnt das Spiel."
Ermitteln Sie eine Gleichung, die die Variable p enthält und die Berechnung des Werts von p ermöglicht.

Aufgabe 6: (1 VP und 1,5 VP)

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1" oder die „2" erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

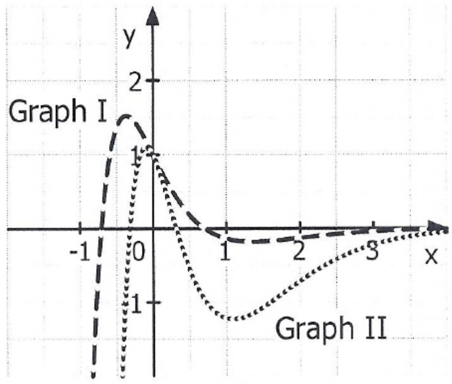
a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt.
b) Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind.

Abbildung zu Aufgabe 1 (Pflichtteil Aufgabensatz 2)



Aufgabe A 1.1 (15 VP)

Für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist G_t der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = \left(1 - tx^2\right) \cdot e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.



a) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von G_t mit der y-Achse unabhängig von t ist. (0,5 VP)
Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_{10} dargestellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1 VP)

b) Begründen Sie, dass f_0 umkehrbar ist. (1 VP)
Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f_0 und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an. (1,5 VP)

c) Betrachtet wird die Tangente an G_0 im Punkt $B(0,5 \mid f_0(0,5))$.
Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der x-Achse. (1 VP)
Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck.
Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt. (1,5 VP)
Bei Rotation dieses Dreiecks um die x- bzw. y-Achse entsteht jeweils ein Körper.
Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang folgende Ungleichung geometrisch:

$$\frac{2\pi}{3e} > \frac{4\pi}{3e^2}$$ (1,5 VP)

d) Für einen bestimmten Wert von t besitzt der Graph G_t zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 8 haben.
Berechnen Sie diesen Wert von t. (2 VP)

e) Die Funktion H mit $H(x) = -\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}$ ist eine Stammfunktion von h mit $h(x) = f_t(x) - f_{t+2}(x)$. Die Graphen G_t und G_{t+2} besitzen für x > 0 keine gemeinsamen Punkte und schließen mit der y-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. (2,5 VP)

f) Für jedes t > 0 hat der Graph G_t zwei Extrempunkte P_t und Q_t.
Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$ liegt. (2,5 VP)

Aufgabe A 1.2 (5 VP)

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit k > 0, deren Ableitungsfunktionen f_k' folgende Gleichung besitzen:

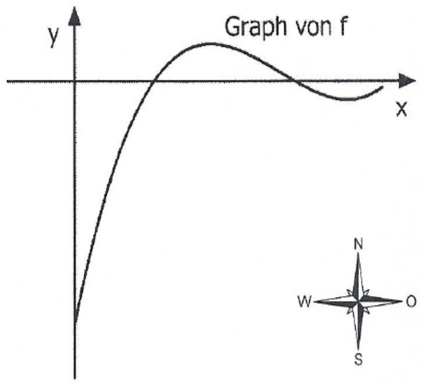
$$f_k'(x) = -\frac{1}{k^2}(x-k)(x+3k)$$

a) Jeder Graph der Schar besitzt einen Wendepunkt. Betrachtet werden die Tangenten in diesen Wendepunkten. Zeigen Sie, dass alle diese Wendetangenten parallel zueinander sind. (2 VP)

b) Jeder Graph der Schar hat einen Extrempunkt im ersten Quadranten. Alle diese Extrempunkte liegen auf der ersten Winkelhalbierenden. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f_k. (3 VP)

Aufgabe A 2.1 (14,5 VP)

Die Abbildung stellt die Planskizze einer Landstraße dar. Der Verlauf dieser Landstraße wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + 9x - \frac{13}{2}$ für $0 \le x \le \frac{9}{2}$ beschrieben. Die positive y-Achse beschreibt dabei die Himmelsrichtung Norden, die positive x-Achse die Himmelsrichtung Osten. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer in der Realität.



a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts P, der den nördlichsten Punkt der Landstraße darstellt. (2,5 VP)
An der Stelle $x_0 = 3$ wechselt das Vorzeichen der Funktion f'' vom Negativen ins Positive. Beschreiben Sie, was dies für den Verlauf der Landstraße bedeutet.
(Teilergebnis: P(2|1)) (1 VP)

b) Ein Teil des Graphen der Funktion g mit $g(x) = -\frac{27}{8}x^2 + \frac{75}{8}x - \frac{13}{2}$ stellt einen Fahrradweg dar, der zwei Punkte der Landstraße verbindet. Diese beiden Punkte werden durch A(a|f(a)) und B(b|f(b)) mit a < b dargestellt.
Bestimmen Sie die Koordinaten von A und B.
(Teilergebnis: a = 0 und b = 1) (2 VP)

Berechnen Sie $\int_0^1 (g(x) - f(x))dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (2,5 VP)

Im Folgenden wird auch der Höhenverlauf der Landstraße betrachtet. Stellt R(r|f(r)) einen Punkt auf der Landstraße dar, so gilt für seine Höhe h(r):

$$h(r) = u(f(r)) \text{ mit } u(x) = 2 - \frac{1}{500}(x-1)^2$$

(h(r) in Kilometer über der Meereshöhe)

c) Zeigen Sie, dass der westlichste Punkt der Landstraße auf einer Höhe von etwa 1890 Meter liegt. (1,5 VP)
Begründen Sie, dass kein Punkt der Landstraße höher als 2000 Meter liegt. (1,5 VP)
Der am höchsten gelegene Punkt auf der Landstraße wird durch den Punkt S auf dem Graphen von f dargestellt. Bestimmen Sie die Koordinaten von S. (1,5 VP)

d) Zum Abfluss von Regenwasser sind die durch P(2|1) und Q(0|f(0)) dargestellten Punkte auf der Landstraße durch ein geradlinig verlaufendes Rohr verbunden. Berechnen Sie das Gefälle dieses Rohrs. (2 VP)

Aufgabe A 2.2 (5,5 VP)

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a^2+1} \cdot x\right)$-

Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels der Tangente an G_0 im Ursprung. (1,5 VP)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Periode von f_a minimal wird. (1 VP)

c) Die Tangente an G_a an der Stelle $x_0 = 0$ und die Tangente an G_a an der kleinsten positiven Nullstelle von f_a schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die der Inhalt dieses Dreiecks $2{,}5\pi$ beträgt. (3 VP)

Aufgabe B1

Auf einem ebenen, horizontalen Gelände steht ein 15 m hoher Mast, an dem drei rechteckige Werbeflächen befestigt sind. In der Abbildung 1 ist eine der Werbeflächen grau dargestellt.
Der Mast ist zylinderförmig und hat einen Durchmesser von 80 cm; er verläuft ebenso wie die seitlichen Kanten der Werbefläche vertikal.

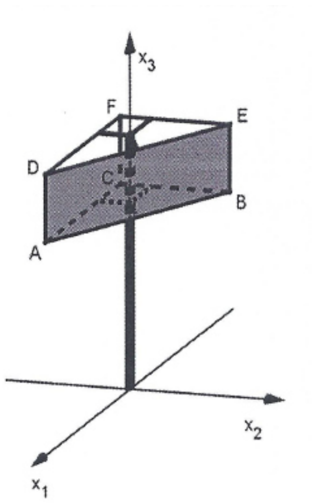


Abb. 1

In einem Koordinatensystem wird das Gelände durch die x_1x_2 - Ebene beschrieben; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.
Der Mittelpunkt der Grundfläche des Masts wird durch den Koordinatenursprung dargestellt.
Die Punkte A(5|-2|11), E(-2|5|15) und F(-2|-2|15) stellen Eckpunkte der Werbeflächen dar.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der grau dargestellten Werbefläche. (1 VP)

Prüfen Sie, ob die beiden anderen Werbeflächen einen rechten Winkel einschließen. (1 VP)

b) Die grau dargestellte Werbefläche liegt im Modell in einer Ebene, deren Gleichung in der Form $a \cdot x_1 + a \cdot x_2 = b$ dargestellt werden kann.
Ermitteln Sie passende Werte von a und b. (1,5 VP)

c) Begründen Sie, dass der Abstand der grau dargestellten Werbefläche zum Mast mit dem Abstand des Mittelpunkts der oberen Kante dieser Werbefläche zum Mast übereinstimmt. (2,5 VP)

Auf dem Gelände befindet sich ein Sportplatz. Von dort aus blickt ein Kind zur grau dargestellten Werbefläche. Die Sicht des Kindes wird durch eine Mauer eingeschränkt. Die obere Kante der Mauer wird im Modell durch die Strecke zwischen den Punkten P(20|-5|3) und Q(20|25|3) dargestellt. Der Punkt, von dem der Blick des Kindes ausgeht, wird durch K(24|15|1) beschrieben. Das Kind kann denjenigen Teil der Werbefläche, der durch das Dreieck GBH mit G(4|-1|11) dargestellt wird, nicht sehen (siehe Abbildung 2).

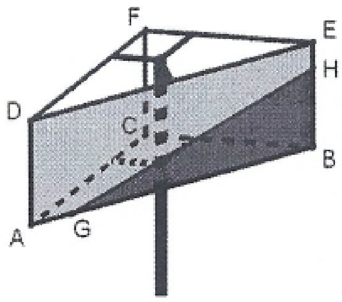


Abb. 2

d) Eine Sichtlinie verläuft im Modell von K zu G. Berechnen Sie die Größe des Winkels dieser Sichtlinie gegenüber der Horizontalen. (1,5 VP)
Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten von H rechnerisch bestimmen könnte. (2 VP)

e) Auf dem Sportplatz wird ein Fußball geschossen. Die Flugbahn des Balls wird im Modell durch Punkte der Form $R_t(32-8t\,|\,5\,|\,-5t^2+6{,}5t+0{,}3)$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit dem Schuss vergangene Zeit in Sekunden.
Der Ball bewegt sich im Modell in der Ebene L. Beschreiben Sie die besondere Lage von L im Koordinatensystem und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. (1 VP)
Untersuchen Sie, ob der Ball die Mauer trifft, bevor er den Boden berührt. (2 VP)

Aufgabe B2

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Körper ABCDEF mit A(6|3|0), B(0|6|0), C(3|0|0), D(6|3|6), E(0|6|6) und F(3|0|12).

a) Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L.
Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. (2 VP)
(Teilergebnis: $L: 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 42$)

b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (1,5 VP)

c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung. (1,5 VP)
Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF. (1,5 VP)

d) Die Ebene N_k enthält die x_3-Achse und den Punkt $P_k(1-k \mid k \mid 0)$ mit $k \in]0;1[$.
Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k.
Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a;b[$, für die N_k für alle Werte von $k \in]a;b[$ jeweils die gleichen Kanten des Körpers schneidet.
Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an. (2 VP)

e) Auf der Kante AD liegt der Punkt Q, auf der Kante BE der Punkt R(0|6|2).
Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel.
Bestimmen Sie die x_3-Koordinate von Q. (2,5 VP)

f) Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der x_1x_2-Ebene liegt und dabei eine positive x_2-Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung:

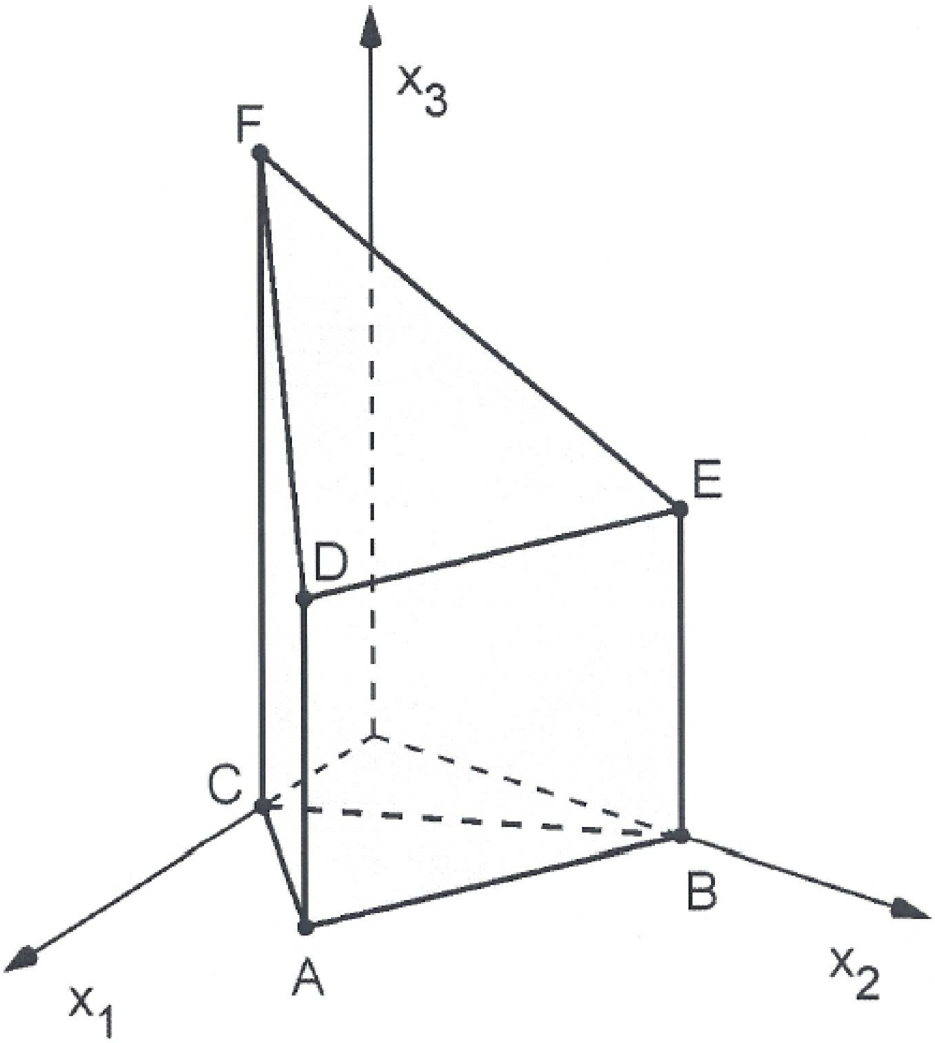
$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow t = 0{,}8 \text{ , d.h. } S(4{,}8|3{,}6|0)$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \left|\overrightarrow{CS}\right| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

(1,5 VP)

Anlage zu Aufgabe B2:



Aufgabe C1

Ein Unternehmen stellt Olivenöl her und füllt es in Flaschen ab. Laut Aufdruck beträgt die Füllmenge jeder Flasche 600 ml.
Die Flaschen werden in Kartons verpackt; jeder Karton enthält zwölf Flaschen. Ein Karton gilt als fehlerhaft, wenn mehr als eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält.
Für jede Flasche beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie weniger als 600 ml Öl enthält, 1,5%.

a) Die Rechnung $0{,}985^{12} \approx 83{,}4\%$ stellt im Sachzusammenhang die Lösung einer Aufgabe dar. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie den Ansatz der Rechnung. (1,5 VP)

b) An einen Supermarkt wird regelmäßig die gleiche Anzahl von Flaschen geliefert. Dabei enthalten im Mittel mehr als 780 Flaschen mindestens 600 ml Öl. Ermitteln Sie, wie viele Flaschen mindestens geliefert werden. (1,5 VP)

c) Ein Supermarkt erhält eine Lieferung von 150 Kartons. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3% der Kartons fehlerhaft sind. (2 VP)

Die Füllmenge der Flaschen soll als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 600,5 ml und einer Standardabweichung von 0,23 ml angenommen werden.

d) Eine Flasche wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Die Flasche enthält mehr als 601 ml Öl.“ (0,5 VP)
B: „Die Füllmenge der Flasche weicht höchstens um 0,5 ml vom Erwartungswert ab.“ (1 VP)

e) Die Füllmenge einer Flasche ist nie negativ. Die Normalverteilung, die zur Beschreibung der Füllmenge der Flaschen verwendet wird, ist jedoch auch für negative reelle Zahlen definiert und nimmt dabei ausschließlich positive Werte an. Begründen Sie, dass die Verwendung der Normalverteilung dennoch sinnvoll ist. (1 VP)

f) Das Unternehmen möchte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält, verringern. Für die nötige Änderung der Maschine, die die Flaschen befüllt, gibt es zwei Vorschläge:
Vorschlag 1: Die eingestellte Füllmenge von 600,5 ml wird erhöht.
Vorschlag 2: Die Genauigkeit, mit der die eingestellte Füllmenge von 600,5 ml erreicht wird, wird erhöht.
Die Abbildungen 1 und 2 in der Anlage zeigen jeweils den Graphen der Dichtefunktion, die vor der Änderung der Maschine die Füllmenge der Flaschen beschreibt. Skizzieren Sie in der Abbildung 1 den Graphen einer Dichtefunktion, die sich aus dem Vorschlag 1 ergeben könnte, und in der Abbildung 2 den Graphen einer Dichtefunktion, die zum Vorschlag 2 passt. Begründen Sie für jeden Vorschlag mithilfe des skizzierten Graphen, dass damit das Ziel des Unternehmens erreicht wird. (3 VP)

g) Jede Flasche wird mit einem Anhänger versehen. Die Anhänger gibt es mit n verschiedenen Motiven. Für jede Flasche wird eines dieser Motive zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n zufällig ausgewählten Flaschen alle Motive verschieden sind, ist kleiner als 1%.
Ermitteln Sie den kleinsten möglichen Wert von n. (2 VP)

Abbildungen zu Aufgabe C 1

Abbildung 1:

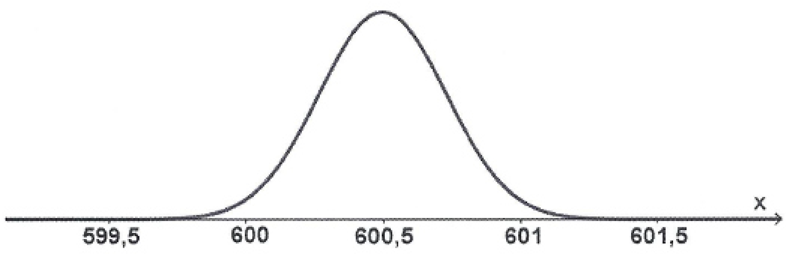
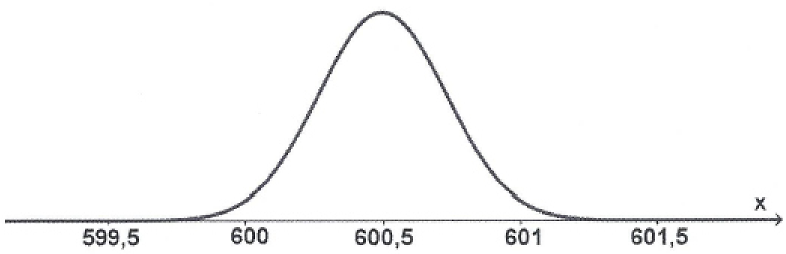
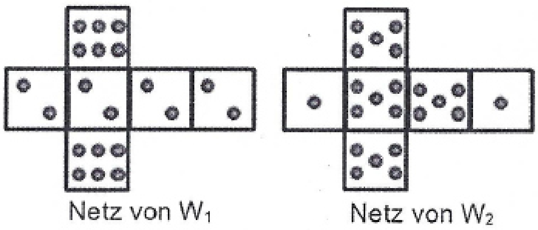


Abbildung 2:



Aufgabe C2

Michael und Torsten spielen mit den beiden Würfeln, deren Netze abgebildet sind, folgendes Spiel:
Michael würfelt mit dem Würfel W_1,
Torsten würfelt mit dem Würfel W_2. Der Spieler mit der höheren Augenzahl gewinnt.



a) Geben Sie alle möglichen Würfelergebnisse an, bei denen Michael das Spiel gewinnt. (1 VP)
Begründen Sie, dass Michaels Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$ beträgt. (1 VP)

b) Michael und Torsten spielen 30 Spiele. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Michael gewinnt mindestens 13, aber höchstens 20 Spiele." (1 VP)
B: „Torsten gewinnt mehr Spiele als Michael." (1 VP)

c) Es werden n Spiele gespielt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Michael dabei nur das letzte Spiel gewinnt, soll weniger als 5% betragen. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von n. (2 VP)

d) Das Spiel wird folgendermaßen verändert: Vor dem Würfeln wird ein Glücksrad mit einem grünen und einem roten Sektor einmal gedreht. Wenn dabei grün erscheint, dann behalten Michael und Torsten ihre Würfel: erscheint rot, dann tauschen sie die Würfel. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Michael bei diesem Spiel eine höhere Zahl als Torsten würfelt, beträgt $\frac{7}{15}$. Bestimmen Sie für den grünen Sektor die Größe des Mittelpunktswinkels. (2,5 VP)

Torsten hat den Verdacht, dass beim Würfel W_2 die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 5 nicht $\frac{2}{3}$ beträgt. Daher wird ein einseitiger Hypothesentest mit 500 Würfen auf dem Signifikanzniveau s durchgeführt. Dabei ergibt sich die Entscheidungsregel, dass die Nullhypothese genau dann abgelehnt wird, wenn weniger als 318-mal die Augenzahl 5 erzielt wird.

e) Formulieren Sie die zugehörige Nullhypothese. (0,5 VP)
Bestimmen Sie alle ganzzahligen Prozentwerte, die für s in Frage kommen. (1,5 VP)

f) Formulieren Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang. (1 VP)
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass beim Würfel W_2 die Augenzahl 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% erzielt wird. (1 VP)