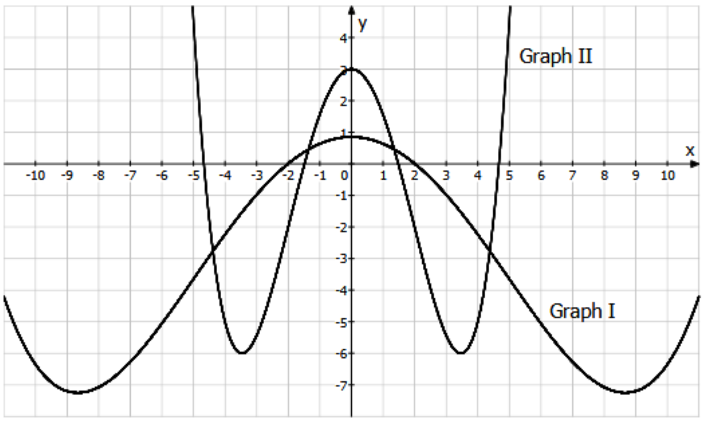
Aufgabe P1: (3 BE und 2 BE)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$.

a) Es gilt $f''(2)\neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist.

b) Einer der abgebildeten Graphen I und II ist der Graph einer Stammfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe.



Aufgabe P2: (1 BE und 4 BE)

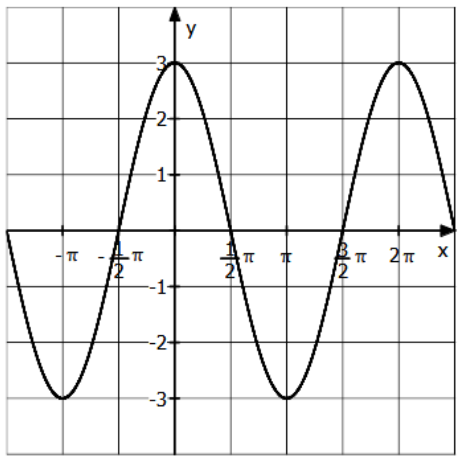
Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=3\cdot\cos(x)$

a) Geben Sie den Wert des Integrals

$\int_0^{\pi} f(x)dx$ an.

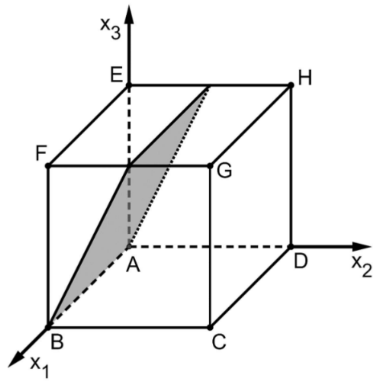
b) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x)=a\cdot f(x)+b\cdot x$ mit reellen Zahlen a und b. Die Punkte (0|-3) und $\left(\frac{\pi}{2}\middle|\frac{3}{4}\pi\right)$ liegen auf dem Graphen von g.

Ermitteln Sie a und b.



Aufgabe P3: (2 BE und 3 BE)

Die Abbildung zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen. Die Ebene K enthält Punkte A(0|0|0), B(4|0|0) und den Mittelpunkt der Kante $\overline{FG}$.



a) Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers.

b) Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$. Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung in der Anlage ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an.

Aufgabe P4: (2 BE und 3 BE)

Bei einem Spiel wird ein Würfel zweimal geworfen. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei keinem der Würfe die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{25}{36}$ beträgt.

b) Der Einsatz bei diesem Spiel beträgt 2 Euro. Je nachdem, wie oft dabei die Zahl 3 erzielt wird, werden folgende Auszahlungen getätigt:

Anzahl der Würfe, bei denen die Zahl 3 erzielt wird	0	1	2
Auszahlung in Euro	0	5	x

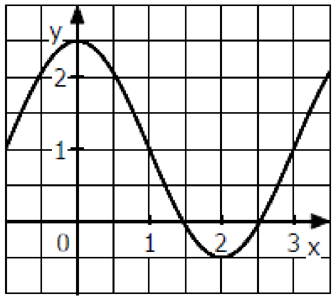
Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Ermitteln Sie den Wert von x.

Aufgabe W1: (5 BE)

Für jedes a > 0 ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = x \cdot e^{\frac{x}{a}}$.
Der Graph jeder Funktion f_a besitzt einen Extrempunkt E_a. Weisen Sie nach, dass es eine Ursprungsgerade gibt, auf der alle Punkte E_a liegen.

Aufgabe W2: (2 BE und 3 BE)

Abgebildet ist der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = a \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x) + b$;
dabei sind a und b reelle Zahlen.



a) Geben Sie die Werte von a und b an.

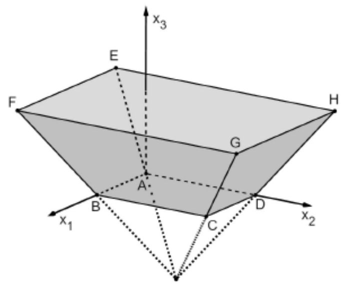
b) Gegeben ist die Funktion J_0 durch $J_0(x) = \int_0^x f(t)dt$ mit $x \in \left]0;\infty\right[$.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von J_0 keinen Schnittpunkt mit der x-Achse hat.

Aufgabe W3: (5 BE)

Die Punkte A(8|0|0), B(0|6|0) und C(4|3|10) sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis $\overline{AB}$. Das Dreieck ABC wird so um die Achse AB gedreht, dass der entstehende Punkt C* in der x_1x_2-Ebene liegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Punktes C*.

Aufgabe W4: (1 BE und 4 BE)

Der abgebildete Körper ABCDEFGH ist Teil einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche EFGH. Die Rechtecke ABCD und EFGH liegen in zwei zueinander parallelen Ebenen mit dem Abstand 5. Der Flächeninhalt von EFGH ist viermal so groß wie der von ABCD. Es gilt: A(0|0|0), B(4|0|0), C(4|6|0) und D(0|6|0).



a) Geben Sie eine Gleichung einer der beiden Symmetrieebenen des Körpers ABCEFGH an.

b) Begründen Sie, dass die Koordinaten des Punkts F mit folgendem Term ermittelt werden können:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe W5: (2 BE und 3 BE)

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

a) Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X=10)=P(X=15)$ ist.

b) Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5."

Aufgabe W6: (5 BE)

Zu einem Zufallsexperiment werden zwei stochastisch unabhängige Ereignisse A und B betrachtet. Es gilt $P(B)=P(A)+0{,}6$ sowie $P(A\cap\overline{B})=0{,}04$.
Bestimmen Sie P(A).

Aufgabe I 1.1

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funkionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 2a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Abbildung 1 zeigt einen Graphen der Schar.

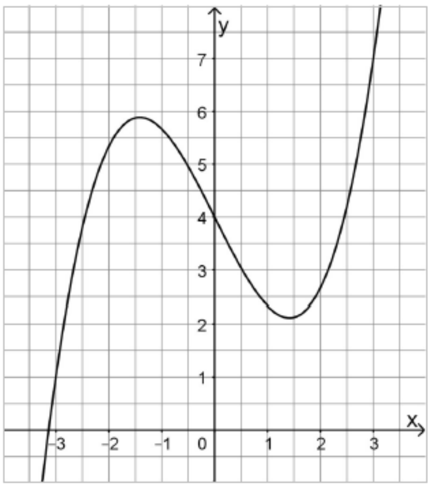


Abb. 1

a) Der abgebildete Graph verläuft durch den Punkt P(0|4). Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt. (2 BE)

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. (5 BE)

c) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^2 f_a(x)dx = 0$ gilt. (4 BE)

Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4$.

Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abbildung 1 zeigt somit den Graphen von f. Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts (0|4).
Die Tangente an G_f im Punkt P(3|f(3)) wird mit t bezeichnet; $y = 7x - 14$ ist eine Gleichung von t.

d) Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass

$$f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 \cdot (x+6) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. (6 BE)

e) Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x)dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Für $-1{,}5 \le k \le 1{,}5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung. Untersuchen Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \ge 1{,}5$ besitzt. (4 BE)

Aufgabe I 1.2

Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen kann, wird als Nennwertreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet.
Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall [-12;36] durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in °C und r(x) der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite.
Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion r.
Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert 0,6, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur 60% seiner Nennreichweite.

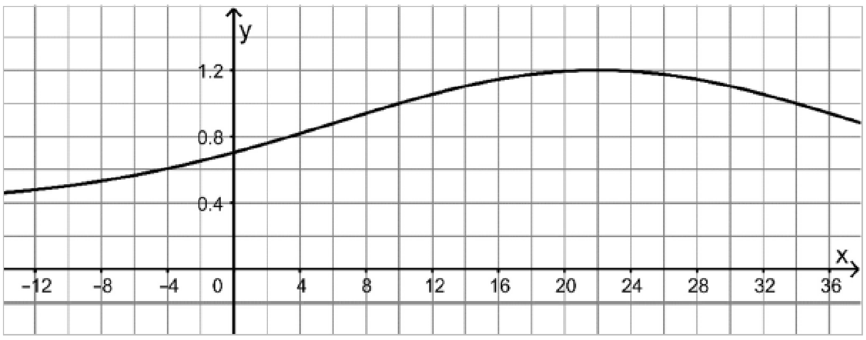


Abb. 2

Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von -12°C bis 36°C sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt.

a) Geben Sie anhand von Abbildung 2 die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang. (4 BE)

b) Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt 320 km, die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt 500 km. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von 0°C. (5 BE)

Aufgabe I 2.1

In einem Tierpark soll ein Tier mit Hilfe einer Diät abnehmen. Die Masse dieses Tieres wird für $t \geq 0$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(t) = 36 \cdot e^{-0{,}05t} + 80$ beschrieben (t in Wochen nach Beginn der Diät, f(t) in Kilogramm).

a) Bestimmen Sie die Masse des Tieres sechs Wochen nach Beginn der Diät. (1 BE)

b) Geben Sie die Masse an, die das Tier auf lange Sicht erreicht. (1 BE)

c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Tier 25% seiner Masse seit Beginn der Diät verloren hat. (4 BE)

d) Bestimmen Sie die momentane Abnahme der Masse des Tieres zum Zeitpunkt $t_1 = 8$. (3 BE)

e) Für alle $t \geq 0$ gilt $f'(t) < 0$ und $f''(t) > 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an. (2 BE)

Für die Funktion h gilt $h(f(t)) = t$ für $t \in \mathbb{R}$.

f) Bestimmen Sie einen Term der Funktion h. (3 BE)

g) Für zwei reelle Zahlen v und w gilt h(v) = w. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. (2 BE)

Aufgabe I 2.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion g_a gegeben durch $g_a(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a \cdot x}$ mit maximalem Definitionsbereich. G_a ist der Graph von g_a.

a) Geben Sie eine Gleichung der senkrechten Asymptote von G_a an. (1 BE)

b) Zeigen Sie, dass für alle a > 0 gilt: $\int_1^e g_a(x)dx < 1 - \frac{1}{e}$. (4 BE)

Jeder Graph G_a besitzt genau einen Punkt P_a mit waagrechter Tangente.

c) Weisen Sie nach, dass P_a die x-Koordinate 2a besitzt. (3 BE)

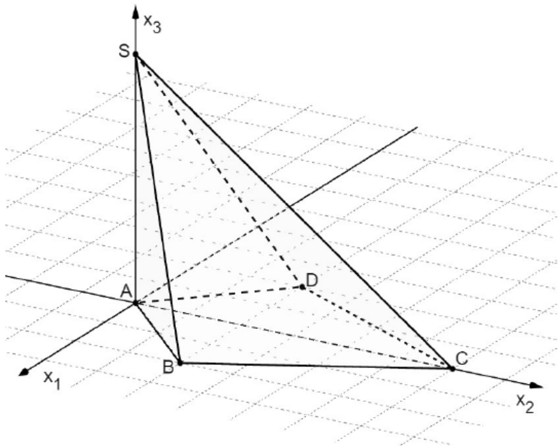
d) Für jeden Wert von a gilt:
- N_a ist der Schnittpunkt von G_a mit der x-Achse.
- Der Kreis K_a hat den Mittelpunkt P_a und verläuft durch N_a.

Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den K_a die y-Achse berührt. (6 BE)

Aufgabe II 1

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten A(0|0|0), B(2|2|0), C(0|6|0) und D(-2|2|0). Die Spitze der Pyramide liegt im Punkt S(0|0|6).

a) Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide ABCDS. (4 BE)



Der Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

b) Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind. Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ein Normalenvektor von E ist. (3 BE)

c) Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (3 BE)

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k : k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0;3[$.
Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k, wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $\overline{SC}$ liegt.

d) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein. (4 BE)

e) Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert. (6 BE)

Aufgabe II 2

Gegeben ist die Ebene F: $x_1 - 3x_2 - x_3 = -6$.

a) Stellen Sie F in einem Koordinatensystem dar. (2 BE)

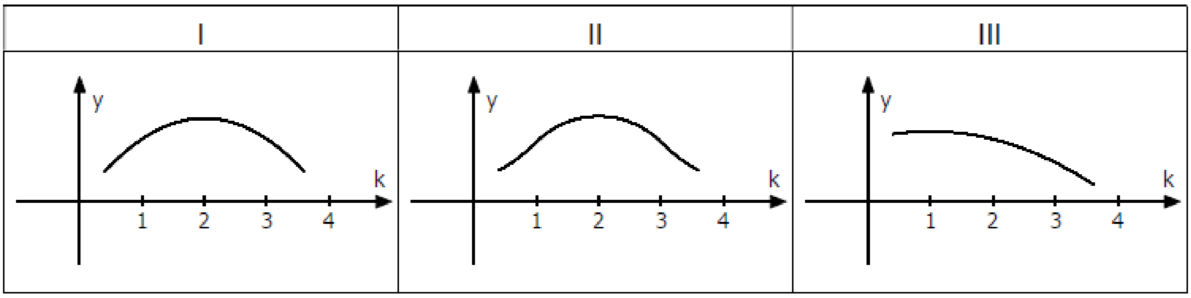
b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den F mit der Ebene $G: -2x_1 + 6x_2 = 8$ einschließt. (3 BE)

Betrachtet wird die Schar der Ebenen $E_k: 2x_1 - 6x_2 + (4-k) \cdot x_3 = -2k$ mit $k \in \mathbb{R}$.

c) Die Ebene F gehört zu dieser Schar.
Geben Sie den zugehörigen Wert von k an. (1 BE)

d) Für einen Wert von k ist E_k orthogonal zu F.
Ermitteln Sie diesen Wert von k. (3 BE)

e) Für jedes k mit 0,4 < k < 3,6 sind die Spurpunkte von E_k auf der x_1- und der x_2-Achse und der Punkt $(0 \mid \frac{4}{3} \mid 0)$ die Eckpunkte eines Dreiecks D_k. Einer der drei abgebildeten Graphen stellt den Flächeninhalt von D_k in Abhängigkeit von k dar. Entscheiden Sie, welcher Graph das ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (4 BE)



f) Es gibt eine Gerade h, die in allen Ebenen der Schar liegt. Ermitteln Sie eine Gleichung von h.

(*zur Kontrolle:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) (4 BE)

g) Begründen Sie, dass h parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft. (1 BE)

h) Die Ebene J enthält die Gerade h, sie ist jedoch keine Ebene der Schar.
Geben Sie eine Gleichung von J an. (2 BE)

Aufgabe III 1

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14% das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10% größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80% aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortrag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortrag gebuchten Fahrkarten werden 90% auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95% etwas höher.

c) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)

d) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortrag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde. (3 BE)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 14% durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8% und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 14%.“ Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

e) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

f) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 15% beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmen Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschrieben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

Aufgabe III 2

Die Zufallsgröße Z gibt die Fahrzeit eines Linienbusses zwischen zwei bestimmten Haltestellen an. Sie kann näherungsweise als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200$ und der Standardabweichung $\sigma = 30$ angenommen werden (alle Werte in Sekunden).

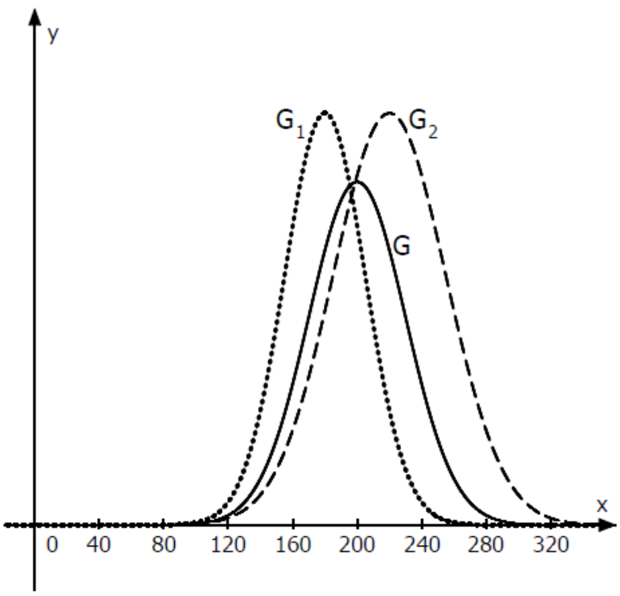
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig ausgewählten Fahrt die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen weniger als 150 Sekunden beträgt. (1 BE)

b) Ermitteln Sie das kleinste Intervall, in dem die Fahrzeit einer zufällig ausgewählte fahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% liegt. (4 BE)

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zehn zufällig ausgewählten Fahrten die Fahrzeit bei genau zwei Fahrten mehr als 220 Sekunden beträgt. (3 BE)

An Markttagen ist die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen durchschnittlich etwas länger als an den übrigen Tagen. Diese Fahrzeit kann durch die normalverteilte Zufallsgröße Z* beschrieben werden.

d) In der Abbildung ist G der Graph der Dichtefunktion von Z. Untersuchen Sie, ob einer der Graphen G_1 und G_2 der Graph der Dichtefunktion von Z* sein könnte. (2 BE)



Eine Fahrt mit einer Fahrzeit von mehr als 240 Sekunden zwischen den beiden Haltestellen gilt als verspätet. Dies ist bei 9% aller Fahrten der Fall. 20% aller Fahrten finden an Markttagen statt. Ein Vierteil der Fahrten an Markttagen ist verspätet.
Zu einer zufällig ausgewählten Fahrt werden folgende Ereignisse betrachtet:
V: „Die Fahrt ist verspätet."
M: „Die Fahrt findet an einem Markttag statt."

e) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. (4 BE)

f) Von den Fahrten ohne Verspätung wird eine Fahrt zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese an einem Tag ohne Markt stattfindet. (2 BE)

g) Eine städtische Mitarbeiterin hält 240 Sekunden als Grenze, ab der eine Fahrt als verspätet gilt, für zu streng. Deshalb schlägt sie vor, eine neue Grenze so festzulegen, dass nur noch 15% der Fahrten an einem Markttag als verspätet gelten. Mit dieser neuen Grenze finden 51% der verspäteten Fahrten an einem Markttag statt. Bestimmen Sie diese neue Grenze. (4 BE)