Mobil & whatsapp 0173-3047 206 • Internet franko-mathe.de/SRH • E-Mail info@franko-mathe.de • Dozent Rawe Franko • Bereich SRH Fachschulen Heidelberg

BINOMIALVERTEILUNG – LÖSUNG

① a) $\binom{8}{3} = \left(\frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5\cdots 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{5\cdots 1}}\right) = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$

verkürzte Rechnung ⇓ obersten 3 Zahlen oben / untersten 3 Zahlen unten

b) $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$

c) $\binom{8}{1} = \frac{8!}{1!7!} = 8$

d) $\binom{8}{0} = \frac{\cancel{8!}^{1}}{0!\cancel{8!}} = \frac{1}{1} = 1$ $\boxed{0! = 1}$

② a) $\binom{8}{1}$ bedeutet 1 Treffer bei 8 Versuchen

⇒ Anzahl der Möglichkeiten/möglichen Pfade ist 8

$\binom{8}{0}$ bedeutet 0 Treffer bei 8 Versuchen

⇒ Anzahl der Möglichkeiten/möglichen Pfade ist 1

b) mit $\binom{8}{3}$ sucht man die Anzahl der Möglichkeiten/möglichen Pfade für 3 Treffer bei 8 Versuchen

⇒ um alle Möglichkeiten zu finden, müsste man die 3 Treffer durchwandern lassen,

$T\,T\,T\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}$
$T\,\bar{T}\,T\,T\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}$
⋮

bei $\binom{8}{5}$ 5 Treffer bzw. 3 Nichttreffer

$T\,T\,T\,T\,T\,\bar{T}\,\bar{T}\,\bar{T}$
$T\,T\,T\,T\,\bar{T}\,T\,\bar{T}\,\bar{T}$
⋮

→ die Anzahl der Möglichkeiten ist gleich

[Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit jedoch ist nicht gleich.]

③ $\binom{100}{4} = 3.921.225$ $\binom{9}{3} = 84$ $\binom{20}{2} = 190$

④ $B_{20;0,2}(3) = 0,205$

$B_{100;\frac{1}{6}}(5) = 0,000291$

$B_{10;0,1}(8) = 3,645\cdot 10^{-7} = 0,0000003645 = 0,00003645\%$

⑤ a)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=k)	0,1615	0,3230	0,2907	0,1550	0,0543	0,0130	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000

b) $E(X) = n\cdot p$
$= 10\cdot\frac{1}{6}$
$= 1,67$

Bsp. Wenn man 6 mal wirft erwartet man 1 5er.

$1 = 6\cdot\frac{1}{6}$

Wenn man 12 mal wirft erwartet man 2 5er

$2 = 12\cdot\frac{1}{6}$

⇓

$\boxed{E(X) = n\cdot p}$
Erwartungswert

Der Erwartungswert ist hier die erwartete Trefferzahl (1,67). Um die Trefferzahl mit der höchsten Wahrscheinlichkeit zu erhalten, schaut man sich die benachbarten zwei Trefferzahlen an (1 und 2) [nicht einfach aufrunden].

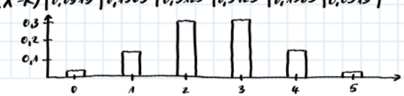
⇒ Die Trefferzahl 1 ist am wahrscheinlichsten.

⑥ a) $B_{5;0,5}(3) = \binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{5\cdot 4\cdot\cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3}\cdot 2\cdot 1\cdot\cancel{2\cdot 1}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10\cdot\frac{1}{2^5} = 10\cdot\frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

b)

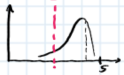
k	0	1	2	3	4	5
P(X=k)	0,0313	0,1563	0,3125	0,3125	0,1563	0,0313



c) Sie ist symmetrisch.

Mobil & whatsapp 0173-3047 206 • Internet franko-mathe.de/SRH • E-Mail info@franko-mathe.de • Dozent Rawe Franko • Bereich SRH Fachschulen Heidelberg

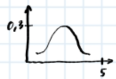
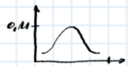
⑦ a) $B_{5;\frac{1}{6}}(k) \quad \leftrightarrow \quad B_{5;\frac{5}{6}}(k)$

$E(X) = 5\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$ $\qquad E(X) = 5\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{6} \approx 4{,}17$

Die Kurve ist gespiegelt.

b) $B_{5;0,5}(k) \quad \leftrightarrow \quad B_{50;0,5}(k)$ (siehe geogebra-Screenshot)

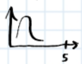
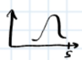
 

Beide sind symmetrisch, der Verlauf ist also gleich.

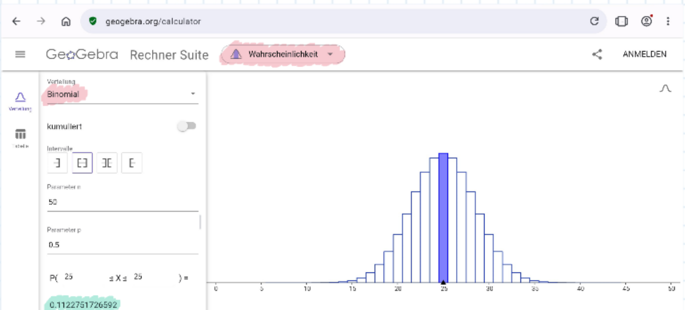
Die Einzelwahrscheinlichkeiten werden bei 50 Werten jedoch geringer, da sie sich auf mehr Säulen verteilen (Summe = 1).

100%

c) $B_{5;0,1}(k) \quad \leftrightarrow \quad B_{5;0,8}(k)$

Die erste Kurve ist eher auf der linken Seite, die zweite auf der rechten Seite.



→ Wert der höchsten Wahrscheinlichkeit

geogebra.org → „Starte Rechner"

PRFG-2021-A-A7

a) $E(X) = n\cdot p = 24\cdot 0{,}5 = \underline{\underline{12}}$

b) $P(X=8) = 0{,}044$

c) $P(X>8) = 1-P(X\le 8) = 1-0{,}076 = \underline{\underline{0{,}924}}$ $\qquad$ 0 … 8 | 9 … 24

d) $P(5\le X\le 8) = P(X\le 8) - P(X\le 4)$ $\qquad$ 0 … 4 | 5 … 8 … 24

$= 0{,}0758 - 0{,}0008$

$= \underline{0{,}075}$ *

Y − Z

e) $P(X=0) = \binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\cancel{4!}^{\,1}}{\underbrace{0!}_{1}\,\cancel{4!}}\cdot 1\cdot\frac{1}{16} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{16} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$

* es gibt noch weitere Lösungsansätze, vereinfacht führen diese aber alle zu: $P(X\le 8) - P(X\le 4)$, z.B.:

$P(X\ge 5) - P(X\ge 9)$

$= (1-P(X\le 4)) - (1-P(X\le 8))$

$= \cancel{1} - P(X\le 4) \cancel{-1} + P(X\le 8)$

$= P(X\le 8) - P(X\le 4)$

MDA-2022-A-A7

a) $E(X) = n\cdot p = 240\cdot 0{,}3 = 72$

b) $P(X>80) = 1-P(X\le 80) = 1-0{,}884 = 0{,}116$ $\qquad$ $\underbrace{0 \ldots 80}_{0{,}884}\,|\,\underbrace{81 \ldots 240}_{0{,}116}$, zusammen 1

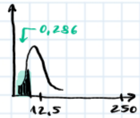
MDA-2022-B-A7

a) $E(X) = n\cdot p = 240\cdot 0{,}7 = 168$

b) $P(X\ge 160) = 1-P(X\le 159) = 1-0{,}116 = 0{,}884$ $\qquad$ 0 … 159 | 160 … 240

Mobil & whatsapp 0173-3047 206 • Internet franko-mathe.de/SRH • E-Mail info@franko-mathe.de • Dozent Rawe Franko • Bereich SRH Fachschulen Heidelberg

MDA-2019-A-A3



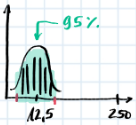
a) $E(X) = n \cdot p = 250 \cdot 0{,}05 = 12{,}5$

b) $P(X \leq 5) = 0{,}013$

c) $P(5 \leq X \leq 10) = \underbrace{P(X \leq 10)}^{cdf} - \underbrace{P(X \leq 4)}^{cdf}$

$= 0{,}2909 - 0{,}0046 = 0{,}286$

d)



$P(12 \leq X \leq 13) =$

$P(11 \leq X \leq 14) =$ } aufwändige Möglichkeit

$P(10 \leq X \leq 15) =$

⋮

$P(? \leq X \leq ?) \approx 0{,}95$ ← gesucht

Sigmaregeln

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

$= \sqrt{250 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}$

$= 3{,}446$

$E(X) + 1{,}96\sigma = 12{,}5 + 1{,}96 \cdot 3{,}446 = 19{,}25$

$E(X) - 1{,}96\sigma = 12{,}5 - 1{,}96 \cdot 3{,}446 = 5{,}75$

→ Intervall: [6 ; 19] (offizielle Antwort)

($P(6 \leq X \leq 19) = 0{,}96 \approx 0{,}95$ (ganz grob))

(zu 95% sind die Mitarbeiter zwischen 6 und 19 Tagen krank)

Beas festgelegte Sigmaregeln

Intervallgrenzen für X:	Wahrscheinlichkeit P
$\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$	0,6827
$\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$	0,9545
$\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma$	0,9973
$\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma$	0,95
$\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma$	0,9
$\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma$	0,99

MDA-2019-A-A9

$B_{n;p}(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

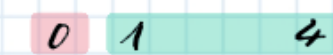
		n	p	k
a)	$\binom{20}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{16}$	20	0,2	4
b)	$12 \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{11}$	12	0,3	1
c)	$12 \cdot 0{,}3^{11} \cdot \cancel{0{,}8}\, 0{,}7$	12	0,3	11
d)	$1 \cdot 0{,}01^{10} \cdot 0{,}99^0$ ($1 = \binom{10}{10}$)	10	0,01	10
		(oder: 10	0,99	0)

MDA-2019-B-A8

$n = 4, \quad p = \frac{1}{2}$

a) $P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$



c) $P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

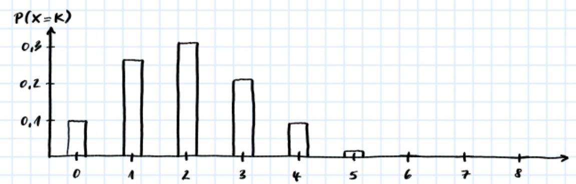
MDA-2019-B-A9

$n = 8, \quad p = 0{,}25$

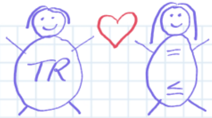
a)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X=k)	0,1001	0,2670	0,3115	0,2076	0,0865	0,0231	0,0038	0,0004	0,0000

b)



c) n größer : Verlauf gleich, Einzelwahrscheinlichkeiten geringer, da mehr Säulen
n kleiner : Verlauf gleich, Einzelwahrscheinlichkeiten höher, da weniger Säulen
p größer/kleiner : Kurve & Erwartungswert verschiebt sich nach rechts/links



2020 - A - 7

$n = 300, \; p = 0{,}775$

a) $E(X) = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}775 = 232{,}5 \Rightarrow$ ca. 233 Betten

b) $P(X \leq 200) = 1{,}14 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000114 = 0{,}00114\,\%$

c) $P(X > 225) = 1 - P(X \leq 225) = 1 - 0{,}166 = 0{,}834$ 0 225 | 226 300

2020 - A - 10

a) nur zwei Ereignisse: Treffer / Nichttreffer

Trefferwahrscheinlichkeit muss gleich bleiben (z.B. Glücksrad, Würfel...)

„mit Zurücklegen"

b) $n = 7 \quad p = \frac{1}{3} \quad k = 3$

c) $n = 20 \quad p = \frac{1}{3} \quad k = 1$