Mobil & whatsapp 0173-3047 206 • Internet franko-mathe.de/SRH • E-Mail info@franko-mathe.de • Dozent Rawe Franko • Bereich SRH Fachschulen Heidelberg

BINOMIALVERTEILUNG

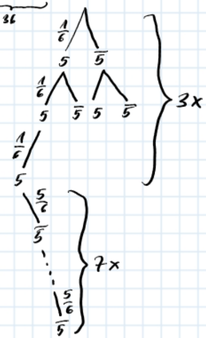
↳ Treffer/Nichttreffer; Wahrscheinlichkeit muss gleich bleiben

Würfel:

2 x „5" würfeln: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

3 x „5" bei 10 Versuchen:

$B_{10;\frac{1}{6}}(3)=P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7=0{,}155$



Bernoulliformel

↳ $B_{n;p}(k)=P(X=k)=\underbrace{\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}_{\text{binomialpdf } n,p,k}$

⇒ binomialverteilt
- n: Versuchsanzahl
- p: Trefferwahrscheinlichkeit
- k: Trefferzahl
- X: „Zufallsvariable"
- $P(X=k)$ = Wahrscheinlichkeit für k Treffer
- $\binom{n}{k}$: sprich „n über k", Anzahl der Möglichkeiten, an welcher Stelle die k Treffer sein könnten bzw. Anzahl möglicher Pfade [„Binomialkoeffizient"]

! : „Fakultät"

$\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\cdot7!}=\frac{10\cdot\cancel{9}^{3}\cdot\cancel{8}^{4}\cdot\cancel{7\ldots1}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{7\ldots1}}=120$ (kürzen) $\quad 10\ \boxed{nCr}\ 3$

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Beispiele – rechnen Sie soweit möglich per Hand und danach zum Vergleich mit dem TR

$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\,5!}=\frac{7\cdot6\cdot\cancel{5\ldots1}}{2\cdot1\cdot\cancel{5\ldots1}}=21$ $\quad$ T T T̄ T̄ T̄ T̄ T̄

$\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!\,2!}=\frac{7\cdot6\cdot\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot2\cdot1}=21$ $\quad$ T T T T T T̄ T̄

$\binom{200}{5}=\frac{200!}{5!\,195!}=\frac{\cancel{200}^{10}\cdot199\cdot\cancel{198}^{66}\cdot197\cdot\cancel{196}^{98}\cdot\cancel{195\ldots1}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{195\ldots1}}=2.535.650.040$

$B_{200;0,1}(17)=\binom{200}{17}\cdot0{,}1^{17}\cdot(1-0{,}1)^{200-17}=\underbrace{\binom{200}{17}}_{\text{Anz. mögl. Pfade}}\cdot\underbrace{0{,}1^{17}\cdot0{,}9^{183}}_{\text{Wahrsch. für 17 Treffer (am Anfang)}}=0{,}077$

(Trefferwahrsch.)

Wahrsch. für 17 Treffer an beliebiger Stelle

$B_{200;0,1}(7)=\binom{200}{7}\cdot0{,}1^7\cdot0{,}9^{193}=0{,}00034$

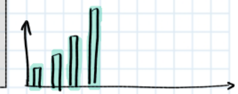
franko-mathe.de/binomialverteilung-A.pdf

⇒ Aufgabe 1 – 7

KUMULIERTE WAHRSCHEINLICHKEITEN

vergleiche: Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Trefferzahl lässt sich so berechnen:

$B_{18;\frac{1}{6}}(3)=P(X=3)=0{,}245$ $\quad$ binomialpdf (passende Trefferzahl)



① $P(X\le3)=P(X=0)+P(X=1)\ldots P(X=3)=0{,}648$ $\quad$ 0 … 3 | 4 … 18

Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 Treffer

binomialcdf $(18,\frac{1}{6},3)$

└ cumulated (addiert Werte bis zur eingegebenen Trefferzahl)

② $P(X\ge4)=1-P(X\le3)=1-0{,}648=0{,}352$ $\quad$ 0 … 3 | 4 … 18 $\quad$ 0,648 $\quad$ 1

mindestens 4 Treffer

③ $P(4\le X\le6)=P(X\le6)-P(X\le3)$ $\quad$ 0 … 3 | 4 6 | 7 … 18

zwischen 4 und 6 Treffer

$=0{,}979-0{,}648=0{,}331$

④ $P(X<4)=P(X\le3)=\ldots$ (s.o.)

weniger als 4

⑤ $P(X>3)=P(X\ge4)=\ldots$ (s.o.)

mehr als 3

SIGMAREGELN

Sigmaregeln

$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx68{,}3\%$

$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx95{,}4\%$

$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx99{,}7\%$

$P(\mu-1{,}64\sigma\le X\le\mu+1{,}64\sigma)\approx90\%$

$P(\mu-1{,}96\sigma\le X\le\mu+1{,}96\sigma)\approx95\%$

$P(\mu-2{,}58\sigma\le X\le\mu+2{,}58\sigma)\approx99{,}0\%$

(Diese Näherungen sind besser, wenn der Stichprobenumfang n größer ist. Nach einer Faustregel gelten sie für $\sigma>3$ als brauchbar.)

2019 – A – 9 ✓
B – 8 ✓
9 ✓
2020 – A – 7
A – 10
B – 5
B – 6
B – 7
2021 – A – 7 ✓
2022 – A – 7 ✓
B – 7 ✓

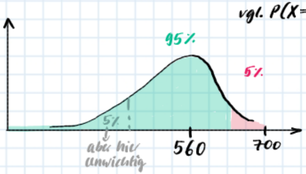
HYPOTHESENTESTS

RECHTSSEITIG

Statistisch gesehen seien 80% der Krankenhausbetten belegt.
In einem Krankenhaus stehen 700 Betten zur Verfügung.
Durch Reinigungen und Reparaturen sind nicht immer alle verfügbar.
Wie viele dürfen das maximal sein, wenn Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 95% dem Bedarf gerecht werden wollen?

$E(X) = n \cdot p = 700 \cdot 0{,}8 = 560$

vgl. $P(X=560) = 0{,}038$



$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$
$= \sqrt{700 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}$
$= 10{,}583$

$1{,}64\sigma = 1{,}64 \cdot 10{,}583 = 17{,}356$

$E(X) + 1{,}64\sigma$
$= 560 + 17{,}356$
$= 577{,}356$

$P(X \leq 576) = 0{,}942$
$P(X \leq 577) = 0{,}953$
$P(X \leq 578) = 0{,}962$

2019 - A - 3

Mobil & whatsapp 0173-3047 206 • Internet franko-mathe.de/SRH • E-Mail info@franko-mathe.de • Dozent Rawe Franko • Bereich SRH Fachschulen Heidelberg