Mobil & whatsapp 0173-3047 206 • Internet franko-mathe.de/SRH • E-Mail info@franko-mathe.de • Dozent Rawe Franko • Bereich SRH Fachschulen Heidelberg

VIERFELDERTAFEL

Es wird untersucht, ob die Einnahme eines Medikaments (M) für die Gesundung Vorteile bringt. Davon wird ausgegangen, wenn es dem Patient innerhalb von 3 Tagen besser geht (V).

Gegeben: $|V \cap M| = 40$, $|V \cap \overline{M}| = 80$, $|\overline{V} \cap M| = 20$, $|\overline{V} \cap \overline{M}| = 720$

absolute Häufigkeiten	M	$\overline{M}$	Σ
V	40	80	120
$\overline{V}$	20	720	740
Σ	60	800	860

relative Häufigkeiten	M	$\overline{M}$	Σ
V	0,047	0,093	0,140
$\overline{V}$	0,023	0,837	0,860
Σ	0,070	0,930	1,000

Mächtigkeit

$|V \cap M| = 40$

Schnittmenge d.h. V und M tritt ein

absolute Häufigkeit

$P(V \cap M) = \frac{40}{860} = 4{,}7\%$

Wahrscheinlichkeit (Probability) — relative Häufigkeit

$P(V \cap M) = \frac{40}{860} = 0{,}0465 = 4{,}65\%$

$P(\overline{V} \cap M) = \frac{20}{860} = 0{,}0233 = 2{,}33\%$

$P(M) = \frac{60}{860} = 0{,}0698 = 6{,}98\%$

allgemeiner Aufbau:

absolute Häufigkeiten	M	$\overline{M}$	Σ
V	$\lvert V \cap M\rvert$	$\lvert V \cap \overline{M}\rvert$	$\lvert V\rvert$
$\overline{V}$	$\lvert \overline{V} \cap M\rvert$	$\lvert \overline{V} \cap \overline{M}\rvert$	$\lvert \overline{V}\rvert$
Σ	$\lvert M\rvert$	$\lvert \overline{M}\rvert$	$\lvert \Omega\rvert$

relative Häufigkeiten	M	$\overline{M}$	Σ
V	$P(V \cap M)$	$P(V \cap \overline{M})$	$P(V)$
$\overline{V}$	$P(\overline{V} \cap M)$	$P(\overline{V} \cap \overline{M})$	$P(\overline{V})$
Σ	$P(M)$	$P(\overline{M})$	$P(\Omega) = 1$

BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Nehmen Sie Stellung zu der Aussage:

„Bei denen, die das Medikament nicht genommen haben, gab es mehr Verbesserungen."

Es gilt zwar:

$|V \cap \overline{M}| > |V \cap M|$

$80 > 40$

(absolute Häufigkeiten)

aber es gilt

$\frac{40}{60} > \frac{80}{800}$

$66{,}7\% > 10\%$

(rel. Häufigkeiten) $P_M(V) > P_{\overline{M}}(V)$ — bedingte Wahrscheinlichkeit

Voraussetzungen / Bedingungen

Um die Frage zu beantworten, darf man also nicht die absoluten Häufigkeiten vergleichen.

$$\begin{pmatrix} |V \cap \overline{M}| > |V \cap M| \\ 80 > 40 \end{pmatrix}$$

Sondern man nimmt die relativen Häufigkeiten, hier die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$P_M(V) > P_{\overline{M}}(V)$

$66{,}7\% > 10\%$

$\frac{40}{60} > \frac{80}{800}$

Daraus leitet sich folgende Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit ab:

$$P_M(V) = \frac{|V \cap M|}{|M|} = \frac{40}{60} = 66{,}7\%$$

Es gilt genauso: $P_M(V) = \frac{P(V \cap M)}{P(M)} = \frac{40/860}{60/860} = \frac{0{,}047}{0{,}070} = 66{,}7\%$

allgemein: $\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

STOCHASTISCHE UNABHÄNGIGKEIT

Wann ist die Verbesserung von der Einnahme des Medikaments unabhängig?

Wenn gilt: $P_M(V) = P_{\overline{M}}(V) = P(V)$ wäre es unabhängig

$\frac{40}{60} \neq \frac{80}{800} \neq \frac{120}{860}$ ↯

ungleich

Da die Gleichungen nicht wahr sind, ist die Verbesserung von der Einnahme des Medikaments abhängig.

$\boxed{P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)}$ $\Leftrightarrow$ A und B sind stochastisch unabhängig alternative Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit

Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit ① $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

bei stochastischer Unabhängigkeit gilt ② $P_A(B) = P(B)$

② in ① eingesetzt: $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad | \cdot P(A)$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$ $\Leftrightarrow$ stochastisch unabhängig (alternative Formel)

SATZ VON BAYES

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad | \cdot P(A)$ $\qquad$ $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad | \cdot P(B)$

$P_A(B) \cdot P(A) = P(A \cap B)$ $\qquad$ $P_B(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

SATZ VON BAYES: $\boxed{P_A(B) \cdot P(A) = P_B(A) \cdot P(B)} \quad | : P(A)$ ← leichter zum Umstellen, logischer zu merken

bzw.

$\boxed{P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(A)}}$ ← offizieller Satz

Wird verwendet, wenn zwei bedingte Wahrscheinlichkeiten im Spiel sind.

Mobil & whatsapp 0173-3047 206 • Internet franko-mathe.de/SRH • E-Mail info@franko-mathe.de • Dozent Rawe Franko • Bereich SRH Fachschulen Heidelberg